Hilbertraum-Theorie für fastlineare Anfangswertprobleme

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Hansjörg Kielhöfer

aus Trier

Bochum 1972

Dissertation eingereicht am	28.6.1972
Tag der mündlichen Prüfung	13.11.1972
Dekan:	Prof. Dr. W. Benz
Referent:	Prof. Dr. K. Kirchgässner
Koreferent:	Prof. Dr. H. Amann

Einleitung

Existenzaussagen über Lösungen von Anfangs- und Randwertproblemen bei partiellen Differentialgleichungen werden in den letzten Jahrzehnten zunehmend mit Hilfe funktionalanalytischer Methoden gewonnen. Dabei wird das Problem als abstrakte Gleichung in einem geeigneten Funktionenraum formuliert. Die Lösungsmethoden sind sehr vielfältig und es kann kaum gelingen, sie alle zu erwähnen oder gar zu vergleichen.

In dieser Arbeit werden fastlineare autonome parabolische Anfangs- und Randwertaufgaben der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = F(u)$$

in einem Gebiet Ω des $\mathbb{R}^n$ untersucht. Dabei ist A ein stark elliptischer und F ein nichtlinearer Differentialoperator.
Einen möglichen Zugang zu solchen Problemen bietet die sogenannte "C_α-Theorie", für Gleichungen zweiter Ordnung dargestellt in den Büchern von Friedman [15] und der Ladyženskaja, Solonnikov, Ural'ceva [28]. Der Name dieser Theorie rührt daher, daß die zugrundeliegenden Funktionenräume $C_{m+\alpha}$-Räume hölderstetig differenzierbarer Funktionen sind. Der Nachteil dieser Theorie liegt darin, daß sie technisch sehr aufwendig und speziell auf diese Probleme und diese Funktionenräume zugeschnitten ist. Die Ergebnisse sind allerdings weitreichend.

Der in dieser Arbeit eingeschlagene Weg nutzt die Tatsache aus, daß der Operator A eine Halbgruppe erzeugt; das Problem wird als fastlineare Evolutionsgleichung in einem geeigneten Hilbertraum formuliert. Dabei muß die Nichtlinearität keineswegs "klein" gegenüber dem linearen Term A, noch beschränkt, monoton, koerziv, hemi- oder hölderstetig sein, was bei der abstrakten Behandlung von nichtlinearen Evolutionsgleichungen in Banachräumen meist vorausgesetzt wird (s. Kommentar auf S. 35).

Ersetzt werden diese Bedingungen durch Regularitätseigenschaften der Abbildung $R = A^{-\alpha_1} \circ F \circ A^{-\alpha_2}$, $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, wobei bei den Anwendungen natürlich ausgenutzt wird, daß A^{-1} kompakt ist. Zur Lösung der Integralgleichung ("milde" Lösung) muß R lediglich stark folgenstetig, zur Lösung der Differentialgleichung ("strikte" Lösung) genügt es zum Beispiel, daß R stetig in den Definitionsbereich von A^{ε}, $\varepsilon > 0$, abbildet.

Diese Hilbertraum-Theorie hat den Vorteil, vielseitig anwendbar zu sein; sie liefert weiterhin Stabilitäts- und auch Instabilitätssätze für stationäre Lösungen im Sinne von Lyapunov. Ein wichtiges Anwendungsbeispiel sind die Navier-Stokesschen Gleichungen (s. [27]).

Hilfsmittel sind im wesentlichen Halbgruppentheorie in Verbindung mit gebrochenen Potenzen von Operatoren und der Zusammenhang von deren Definitionsbereichen mit Interpolationsräumen. Zum ersten sind die Arbeiten von Kato und Fujita ([21], [26]) und zum zweiten die Darstellung von Lions und Magenes [32] zu erwähnen.

Im ersten Kapitel werden lokale Existenzsätze für abstrakte fastlineare Evolutionsgleichungen im Hilbertraum hergeleitet und die allgemeinsten Bedingungen an die Operatoren A und $R = A^{-\alpha_1} \circ F \circ A^{-\alpha_2}$ angegeben. Der Lösungsweg führt über die Integralgleichung ("Formel der Variation der Konstanten").

Im zweiten Kapitel wird ein Stabilitäts- und Instabilitätssatz von Lyapunov (aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen) für unendlichdimensionale Hilberträume verallgemeinert und ein hinreichendes Kriterium (Wachstumsbedingung an die Nichtlinearität) für die globale Existenz angegeben.

Im dritten Kapitel werden schließlich die Ergebnisse der ersten beiden Kapitel auf eine Reihe von Anfangs- und Randwertprobleme angewandt. Es wird insbesondere untersucht, wie allgemein nichtlineare Differentialoperatoren der Form $f(D_\gamma u)$ innerhalb dieser Theorie sein können, wobei ein Zusammenhang zwischen der Regularität von f, der Ordnung der Differentiation D_γ, der Ordnung von A und der Dimension des Gebietes Ω besteht. Schließlich wird auch die Auswirkung der Regularität von f auf die Regularität der Lösung u festgestellt (analytischer Fall).

Herrn Professor Kirchgässner möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und seine ständige Diskussionsbereitschaft herzlich danken.

Inhalt

Kapitel 1

Lokale Existenzsätze für fastlineare Evolutionsgleichungen im Hilbertraum.

§ 1: Hilfssätze über stark stetige lineare Halbgruppen.

Im ganzen ersten Kapitel ist E ein reeller Hilbertraum mit dem Skalarprodukt (,) und der Norm $\| \ \|$.

A ist ein dicht definierter linearer Operator in E und $-A$ erzeugt eine holomorphe Halbgruppe e^{-At}, für die gilt:

$$(1.1) \qquad \| e^{-At} u \| \leq \gamma_1 e^{-\delta t} \| u \| \quad , \qquad \delta > o, \quad t \geq o$$

für alle $u \in E$. (Def. s. [14], p. 101 ff.)

Für solche Operatoren A können nach Sobolevskii (s. [45], [14]) gebrochene Potenzen definiert werden:

$$(1.2) \qquad A^{-\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_o^\infty e^{-At} t^{\alpha-1} \, dt \, , \qquad \alpha > o$$

$$(1.3) \qquad A^{\alpha} := (A^{-\alpha})^{-1} \quad , \quad D(A^{\alpha}) = R(A^{-\alpha}) .$$

Dabei wird mit D stets der Definitionsbereich und mit R der Wertebereich eines Operators bezeichnet.

Diese Operatoren A^α haben folgende Eigenschaften (s. [45], [14]):

$$A^\alpha A^\beta u = A^{\alpha+\beta} u \qquad , u \in D(A^{\alpha+\beta})$$

$$(1.4) \qquad A^\alpha e^{-At} u = e^{-At} A^\alpha u \qquad , u \in D(A^\alpha), \quad t \geq o$$

$$\|A^\alpha e^{-At} u\| \leq \gamma_2 e^{-\delta t} t^{-\alpha} \|u\| , u \in E, \quad t > o .$$

$e^{-At} u$ ist für jedes feste u eine auf $\mathbb{R}_+$ definierte stetige Abbildung in E; e^{-At} ist eine stetige Abbildung in den Raum der beschränkten linearen Operatoren $\mathcal{L}(E)$ (mit der gleichmäßigen Operatornorm versehen) aber nur genau dan wenn A beschränkt ist.

Es läßt sich indes zeigen, daß $\{e^{-At} u\}$ gleichgradig stetig in t ist, wenn u auf einem Kompaktum in E variiert. Allgemeiner noch gilt folgendes:

Lemma 1.1 K sei eine relativ kompakte Menge in E. Dann ist die Funktionenfamilie $\{A^\alpha e^{-At} u \mid u \in K\}$ mit $\alpha \geq o$ in jedem $t_o > o$ gleichgradig stetig, d.h.:

$$\|A^\alpha e^{-At_o} u - A^\alpha e^{-At} u\| < \varepsilon , \text{ falls } |t_o - t| < \delta(\varepsilon)$$

für alle $u \in K$.

Beweis: Nach Schauder gilt folgender Satz:
Zu jedem $\varepsilon_1 > o$ gibt es eine stetige Abbildung $F_{\varepsilon_1} : K \to E_{n_{\varepsilon_1}} \subset E$, wobei $E_{n_{\varepsilon_1}}$ endlich-dimensional ist und

$$(1.5) \qquad \|F_{\varepsilon_1}(u) - u\| < \varepsilon_1 \qquad \text{für alle } u \in K$$

lt. $e_1,\ldots,e_{n_{\varepsilon_1}}$ sei eine orthonormierte Basis in $E_{n_{\varepsilon_1}}$. Da D(A) dicht in E ist, gibt es zu jedem $\eta > o$ n_{ε_1} Elemente f_i in D(A) mit:

(1.6) $$\|e_i - f_i\| < \eta , \qquad i = 1,\dots,n_{\varepsilon_1} .$$

Ist $F^{\eta}_{n_{\varepsilon_1}} := \operatorname{span}\{f_1,\dots,f_{n_{\varepsilon_1}}\}$, dann wird eine lineare Abbildung $L^{\eta}_{\varepsilon_1}$ von $E_{n_{\varepsilon_1}}$ nach $F^{\eta}_{n_{\varepsilon_1}}$ als lineare Fortsetzung der Zuordnung $e_i \longmapsto f_i$ definiert.

Wegen (1.6) gilt:

$$\|L^{\eta}_{\varepsilon_1} x - x\| < n_{\varepsilon_1}\eta \ \|x\| \qquad \text{oder}$$

$$\|L^{\eta}_{\varepsilon_1} x\| < (1 + n_{\varepsilon_1} \eta) \|x\| \ \text{ für alle } x \in E_{n_{\varepsilon_1}} .$$

Definiert man $G^{\eta}_{\varepsilon_1} := L^{\eta}_{\varepsilon_1} \circ F_{\varepsilon_1}$, so bildet $G^{\eta}_{\varepsilon_1}$ K stetig in den endlich dimensionalen Teilraum $F^{\eta}_{n_{\varepsilon_1}}$ von D(A) ab und wegen (1.5) folgt:

$$\|G^{\eta}_{\varepsilon_1}(u)\| < (1 + n_{\varepsilon_1} \eta)(d_o + \varepsilon_1) \qquad \text{für alle } u \in K,$$

wobei d_o eine obere Schranke der Normen der Elemente aus K ist. Weiter gilt:

$$\|G^{\eta}_{\varepsilon_1}(u) - u\| \le \|L^{\eta}_{\varepsilon_1} F_{\varepsilon_1}(u) - F_{\varepsilon_1}(u)\| + \|F_{\varepsilon_1}(u) - u\| < n_{\varepsilon_1}\eta(d_o + \varepsilon_1) + \varepsilon_1$$

für alle $u \in K$.

Gibt man nun ε_1 und η_1 beliebig vor, dann folgt für $\eta = \dfrac{\eta_1}{n_{\varepsilon_1}(d_o + \varepsilon_1)}$:

(1.7) $$\left.\begin{aligned} &\|G^{\eta}_{\varepsilon_1}(u)\| < d_o + \varepsilon_1 + \eta_1 \\ &\|G^{\eta}_{\varepsilon_1}(u) - u\| < \varepsilon_1 + \eta_1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{für alle } u \in K$$

Im folgenden sei nun $t_o > o$ fest.

$$A^\alpha e^{-At_o} u - A^\alpha e^{-At} u = A^\alpha e^{-At} (e^{-A(t_o-t)} - I)u \quad , \quad o < t < t_o$$

$$= A^\alpha e^{-At_o} (I - e^{-A(t-t_o)})u \quad , \quad o < t_o < t.$$

(I = Identität in E.)

Der Beweis des Lemmas wird für den Fall $o < t_o - \delta_o < t < t_o$ geführt:

Mittels (1.4) folgt:

$$\|A^\alpha e^{-At_o}u - A^\alpha e^{-At}u\| < \gamma_2(t_o-\delta_o)^{-\alpha} \{ \|(e^{-A(t_o-t)} - I)G^\eta_{\varepsilon_1}(u)\|$$

$$+ \|(e^{-A(t_o-t)} - I)(G^\eta_{\varepsilon_1}(u) - u)\| \} .$$

Da $G^\eta_{\varepsilon_1}(u) \in F^\eta_{n_{\varepsilon_1}} \subset D(A)$ ist, folgt:

$$(e^{-A(t_o-t)} - I)\, G^\eta_{\varepsilon_1}(u) = - \int_o^{t_o-t} e^{-As}\, A\, G^{\eta_1}_{\varepsilon_1}(u)\, ds \quad .$$

Setzt man $C^\eta_{\varepsilon_1} := \sup\limits_{\substack{x \in F^\eta_{n_{\varepsilon_1}} \\ \|x\|=1}} \|A\, x\|$ (d.h. $C^\eta_{\varepsilon_1}$ ist die Norm von $A|F^\eta_{\varepsilon_1}$), so kann

man mittels (1.1) und (1.7) abschätzen:

$$\|(e^{-A(t_o-t)} - I)G^\eta_{\varepsilon_1}(u)\| < \gamma_1 C^\eta_{\varepsilon_1} (d_o + \varepsilon_1 + \eta_1)(t_o-t)$$

$$\|(e^{-A(t_o-t)} - I)(G^\eta_{\varepsilon_1}(u) - u)\| < (\gamma_1 + 1)(\varepsilon_1 + \eta_1) \ .$$

Sei nun $\varepsilon > o$ beliebig vorgegeben.

Man setzt $\varepsilon_1 = \eta_1 = \dfrac{\varepsilon}{2\gamma_2(t_o-\delta_o)^{-\alpha}(\gamma_1+1)}$. Damit ist η und $C^\eta_{\varepsilon_1}$ festgelegt und man erhält:

$$\|A^{\alpha} e^{-At_o} u - A^{\alpha} e^{-At}u\| < \gamma_2(t_o-\delta_o)^{-\alpha} \gamma_1 C^{\eta}_{\varepsilon_1} (d_o + \varepsilon_1 + \eta_1)(t_o-t)$$

$$+ \gamma_2(t_o-\delta_o)^{-\alpha}(\gamma_1 +1)(\varepsilon_1 + \eta_1)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

falls nur $t_o-t < \dfrac{\varepsilon}{2\gamma_2(t_o-\delta_o)^{-\alpha} \gamma_1 C^{\eta}_{\varepsilon_1} (d_o+ \varepsilon_1+ \eta_1)}$ ist.

Diese Abschätzung gilt für alle $u \in K$.

<u>Korollar 1.2</u> K sei eine relativ kompakte Menge in E. Dann ist die Funktionenfamilie $\{e^{-At}u \mid u \in K\}$ in jedem $t \geq o$ gleichgradig stetig; insbesondere gilt für $t = o$:

$$\|(e^{-Ah} - I)u\| < \varepsilon , \text{ falls } o \leq h < \delta(\varepsilon) , \quad \text{für alle } u \in K.$$

Für die nachfolgenden lokalen Existenzsätze ist folgendes Lemma von grundlegender Bedeutung. Die darin enthaltene Kompaktheitsaussage wird die Anwendung des Schauderschen Fixpunktsatzes gestatten.

<u>Lemma 1.3</u> E, F seien reelle Hilberträume; $X = C([T,T_1],E)$, $Y = C([T,T_1],F)$, $0 \leq T < T_1$, werden mit der üblichen Supremumsnorm versehen. $R:F \times E \longrightarrow E$ sei ein Operator mit folgenden Eigenschaften:

$R(v,\cdot)$ ist linear und beschränkt für jedes $v \in F$,

$R(\cdot,u)$ ist für jedes $u \in E$ stark folgenstetig, d.h. $v_n \rightharpoonup v$ (schwach) in F impliziert $R(v_n,u) \longrightarrow R(v,u)$ (stark) in E,

$K \subset X$ sei relativ kompakt in X, $B \subset Y$ sei beschränkt in Y.

Weiter sei $0 \leq \alpha < 1$. Dann ist die Menge

$$L = \{f \mid f(t) = \int_T^t A^\alpha e^{-A(t-s)} R(v(s),u(s))ds \ , \ v \in B, \ u \in K\}$$

relativ kompakt in X.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß L beschränkt, gleichgradig stetig und $L(t_o) = \{f(t_o) \mid f \in L\}$ für jedes $t_o \in [T,T_1]$ relativ kompakt in E ist.

Zunächst folgt aufgrund der Voraussetzung für alle $v \in B$, $u \in K$:

$$\|v(s)\| \leq d_1 \ , \quad \|u(s)\| \leq d_2 \ , \qquad s \in [T,T_1].$$

Wegen der Voraussetzung über R und des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit gilt damit eine Abschätzung:

$$(1.8) \quad \|R(v(s), u(s))\| \leq R_{d_1} \|u(s)\| \leq R_{d_1} d_2, \quad s \in [T,T_1],$$

für alle $v \in B$, $u \in K$,

was (mittels(1.4)) die Existenz des Integrals und die Beschränktheit von L in der Norm von X garantiert. (Daß L tatsächlich Teilmenge von X ist, folgt aus der später gezeigten gleichgradigen Stetigkeit von L.)

$L(t_o)$ ist für jedes $t_o \in [T,T_1]$ relativ kompakt in E:
$t_o = T$ ist trivial ($f(T) = 0$). Sei also $t_o \in (T,T_1]$:

$$f(t_o) = \int_T^{t_o} A^\alpha e^{-A(t_o-s)} R(v(s),u(s))ds = \int_o^{t_o-T} A^\alpha e^{-As} R(v(t_o-s),u(t_o-s))ds$$

$$= \int_o^\delta A^\alpha e^{-As} R(v(t_o-s),u(t_o-s))ds + \int_\delta^{t_o-T} A^\alpha e^{-As} R(v(t_o-s),u(t_o-s))ds$$

für $0 < \delta < t_o-T$.

$M := \{v(t_o-s) \mid v \in B,\ s \in [\delta, t_o-T]\}$ ist beschränkt in F.

Es wird nun gezeigt, daß die Menge

$$I_\delta := \{A^\alpha e^{-As} R(v(t_o-s), u(t_o-s)) \mid v \in B,\ u \in K,\ s \in [\delta, t_o-T]\}$$

relativ kompakt in E ist. Denn sei

$$\{A^\alpha e^{-As_k} R(v_k(t_o-s_k), u_k(t_o-s_k))\}_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{eine Folge in } I_\delta .$$

Dann existiert eine geeignete Teilfolge $\{k'\} \subset \mathbb{N}$, so daß gilt:

a. $v_{k'}(t_o-s_{k'}) \longrightarrow v_o$ in F (Beschränktheit von M)

b. $u_{k'} \longrightarrow u_o$ in X (Rel. Kompaktheit von K in X)

c. $s_{k'} \longrightarrow s_o$ in $[\delta, t_o-T]$

d. $R(v_{k'}(t_o-s_{k'}), u) \longrightarrow R(v_o, u)$ für jedes $u \in E$ (Voraussetzung über R und a.)

Damit kann abgeschätzt werden (s. (1.4), (1.8)):

$$\|A^\alpha e^{-As_{k'}} R(v_{k'}(t_o-s_{k'}), u_{k'}(t_o-s_{k'})) - A^\alpha e^{-As_o} R(v_o, u_o(t_o-s_o))\|$$

$$\le \gamma_2\, \delta^{-\alpha} R_{d_2} \|u_{k'}(t_o-s_{k'}) - u_{k'}(t_o-s_o)\|$$

$$+ \gamma_2\, \delta^{-\alpha} R_{d_2} \|u_{k'}(t_o-s_o) - u_o(t_o-s_o)\|$$

$$+ \gamma_2\, \delta^{-\alpha} \|R(v_{k'}(t_o-s_{k'}), u_o(t_o-s_o)) - R(v_o, u_o(t_o-s_o))\|$$

$$+ \|(A^\alpha e^{-As_{k'}} - A^\alpha e^{-As_o}) R(v_o, u_o(t_o-s_o))\|$$

$< \varepsilon$, falls $k' > k_o(\varepsilon)$, da für die einzelnen Summanden gilt:

1. Summand $< \frac{\varepsilon}{4}$ wegen der gleichgradigen Stetigkeit von K und wegen c.,

2. Summand $< \frac{\varepsilon}{4}$ wegen b.,

3. Summand $< \frac{\varepsilon}{4}$ wegen d.,

4. Summand $< \frac{\varepsilon}{4}$ wegen Lemma 1.1.

Damit besitzt jede Folge in I_δ eine konvergente Teilfolge, was die relative Kompaktheit in E impliziert.

Nach einem Satz von Mazur ([12],p. 416) ist dann der Abschluß der konvexen Hülle von I_δ $\overline{\text{conv } I_\delta}$ kompakt in E.

Da für alle $v \in B$, $u \in K$ $\frac{1}{(t_o-T)-\delta} \int_\delta^{t_o-T} A^\alpha e^{-As} R(v(t_o-s), u(t_o-s))ds$

in $\overline{\text{conv } I_\delta}$ liegt, folgt damit:

$$L_\delta(t_o) := \{ \int_\delta^{t_o-T} A^\alpha e^{-As} R(v(t_o-s), u(t_o-s))ds \mid v \in B, u \in K\}$$

ist relativ kompakt in E für jedes $\delta > o$.

Da $\| \int_o^\delta A^\alpha e^{-As} R(v(t_o-s), u(t_o-s)ds\| \leq \gamma_2 R_{d_1} d_2 \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} < \varepsilon$ für alle

$v \in B$, $u \in K$ ist, ist auch $L(t_o)$ relativ kompakt in E. (Ein ε-Netz in $L_\delta(t_o)$ ist nämlich ein 2ε-Netz in $L(t_o)$.)

Damit bleibt nur noch die gleichgradige Stetigkeit von L zu zeigen.

Zunächst der einfache Fall $t_o = T$:

$$\|f(t) - f(T)\| = \|f(t)\| \leq \gamma_2 R_{d_1} d_2 \frac{(t-T)^{1-\alpha}}{1-\alpha} < \varepsilon, \text{ sofern nur } t-T < \delta(\varepsilon)$$

für alle $f \in L$

Sei nun $t_o \in (T,T_1)$ und $t > t_o$:

$$f(t_o) - f(t) = (I - e^{-A(t-t_o)})f(t_o) - \int_{t_o}^{t} A^\alpha e^{-A(t-s)} R(v(s), u(s))ds$$

Unter Berücksichtigung von Korollar 1.2 folgt damit:

$$\|f(t_o) - f(t)\| < \|(e^{-A(t-t_o)} - I)f(t_o)\| + \gamma_2 R_{d_1} d_2 \frac{(t-t_o)^{1-\alpha}}{1-\alpha} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

sofern nur $t-t_o < \delta(\varepsilon)$, für alle $f \in L$, da $L(t_o)$ nach dem zuvor Bewiesenen relativ kompakt in E ist.

Sei nun letztlich $t_o \in (T,T_1]$ und $t < t_o$:

$$f(t) - f(t_o) = \int_{T}^{t_o-\delta} (A^\alpha e^{-A(t-s)} - A^\alpha e^{-A(t_o-s)}) R(v(s), u(s))ds$$

$$+ \int_{t_o-\delta}^{t} (A^\alpha e^{-A(t-s)} - A^\alpha e^{-A(t_o-s)}) R(v(s), u(s))ds$$

$$- \int_{t}^{t_o} A^\alpha e^{-A(t_o-s)} R(v(s), u(s))ds \quad \text{mit } t_o-\delta < t < t_o.$$

Der zweite und dritte Summand sind jeweils, unabhängig von $v \in B$ und $u \in K$, durch $2\,\gamma_2 R_{d_1} d_2 \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ abzuschätzen.

Bleibt noch der erste Summand:

Sei $s \in [T,t_o-\delta]$ fest. Dann ist aufgrund der Voraussetzungen über R, B und K die Menge $\{R(v(s), u(s)) \mid v \in B, u \in K\}$ relativ kompakt in E. Nach dem Lemma 1.1 gilt dann für jedes $s \in [T,t_o-\delta]$:

$$\lim_{t \uparrow t_o} \sup_{\substack{v\in B\\ u\in K}} \|(A^\alpha e^{-A(t-s)} - A^\alpha e^{-A(t_o-s)}) R(v(s), u(s))\| = 0$$

Wegen

$$\sup_{\substack{v\in B\\ u\in K}} \|(A^{\alpha} e^{-A(t-s)} - A^{\alpha} e^{-A(t_o-s)}) R(v(s), u(s))\|$$

$$< \gamma_2 R_{d_1} d_2 ((t-s)^{-\alpha} + (t_o-s)^{-\alpha})$$

folgt nach dem Satz von Lebesgue:

$$\lim_{t\uparrow t_o} \int_T^{t_o-\delta} \sup_{\substack{v\in B\\ u\in K}} \|(A^{\alpha} e^{-A(t-s)} - A^{\alpha} e^{-A(t_o-s)}) R(v(s), u(s)\| ds = 0$$

oder:

$$\left\| \int_T^{t_o-\delta} (A^{\alpha} e^{-A(t-s)} - A^{\alpha} e^{-A(t_o-s)}) R(v(s), u(s))ds \right\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{sofern nur}$$

$t_o-t < \delta(\varepsilon) < \delta$, für alle $v \in B$, $u \in K$.

Damit ist Lemma 1.3 bewiesen.

Lemma 1.4 Sei E,F,X,Y wie in Lemma 1.3, $R:F \to E$ ein stark folgenstetiger Operator. $B \subset Y$ sei beschränkt in Y und $o \le \alpha < 1$. Dann ist die Menge

$$L = \{f \mid f(t) = \int_T^t A^{\alpha} e^{-A(t-s)} R(v(s))ds , \quad v \in B\}$$

relativ kompakt in X.

Beweis: Analog zu dem Beweis von Lemma 1.3.

§ 2 Lokale Existenzsätze; Integralgleichungen im Hilbertraum

Wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen ist es eine praktische Methode, die Existenz der Lösung von Evolutionsgleichungen über die "zugehörige" Integralgleichung zu beweisen. Anders wie dort gilt hier aber keineswegs eine Äquivalenz von Integral- und Differentialgleichung; man muß vielmehr einige Mühe darauf verwenden zu zeigen, daß - unter gewissen Voraussetzungen - eine Lösung der Integralgleichung auch eine "Lösung" der Differentialgleichung ist. Dabei ist noch zu definieren, was unter einer "Lösung" zu verstehen ist. Das alles geschieht in § 3 dieses Kapitels.

Die folgenden beiden Sätze sind lokale Existenzsätze für Integralgleichungen.

$$
(1.9) \quad \begin{cases} R: E \times E \to E, \\ R(v,\cdot) \text{ ist linear und beschränkt für jedes } v \in E, \\ R(\cdot,u) \text{ ist für jedes } u \in E \text{ stark folgenstetig,} \\ v \longmapsto R(v,\cdot) \text{ ist als Abbildung von } E \text{ in } \mathcal{L}(E) \text{ stetig.} \end{cases}
$$

Satz 1.5 R genüge (1.9) und es sei $o \leq \alpha < 1$.
Dann besitzt die Integralgleichung

$$
u(t) = e^{-At} u_o + \int_o^t A^\alpha e^{-A(t-s)} R(u(s),u(s))ds \quad , u_o \in E
$$

eine stetige Lösung in einem Intervall $[0,T]$.

Beweis: Man wählt $d > \gamma_1 \|u_o\|$ und bestimmt

$$
T = \left(\frac{(1-\alpha)(d-\gamma_1 \|u_o\|)}{\gamma_2 R_d \, d} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
$$

In $X = C([0,T],E)$ löst man für festgewähltes v aus der Kugel

$$B = \{v \mid v \in X, \|v\|_X \leq d\} \quad , \quad \|v\|_X = \sup_{[0,T]} \|v(t)\| \, ,$$

iterativ die Integralgleichung

$$(1.10) \qquad u(t) = e^{-At} u_o + \int_o^t A^\alpha \, e^{-A(t-s)} \, R(v(s), u(s))ds \, .$$

Die Iteration ist folgende:

$$u_o(t) = e^{-At} u_o \quad , \qquad u_{n+1}(t) = \int_o^t A^\alpha \, e^{-A(t-s)} \, R(v(s), u_n(s))ds.$$

Man zeigt leicht induktiv, daß alle u_n für $t \geq o$ stetig sind (s. Beweis von Lemma 1.3) und daß für jedes $v \in B$

$$(1.11) \qquad \|u_n(t)\| \leq \left(\frac{\gamma_2 \, R_d t^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \right)^n \gamma_1 \, \|u_o\|$$

gilt. Nun ist $\dfrac{\gamma_2 \, R_d \, T^{1-\alpha}}{1 - \alpha} < 1$ nach Definition von T, so daß $\sum\limits_{n=o}^{\infty} u_n$ in X konvergiert. Man setzt $u = \sum\limits_{n=o}^{\infty} u_n$ und erhält:

$$\|u\|_X \leq \sum_{n=o}^{\infty} \|u_n\|_X < d \, , \quad \text{d.h. } u \in B.$$

Weiterhin gilt nach Konstruktion:

$$\sum_{n=o}^{\infty} u_n(t) = e^{-At} u_o + \sum_{n=o}^{\infty} \int_o^t A^\alpha \, e^{-A(t-s)} \, R(v(s), u_n(s))ds$$

$$= e^{-At} u_o + \int_o^t A^\alpha \, e^{-A(t-s)} \, R(v(s), \sum_{n=o}^{\infty} u_n(s))ds$$

da erstens $\|\sum_{n=o}^{\infty} A^{\alpha} e^{-A(t-s)} R(v(s), u_n(s))\|$ eine auf $[o,t)$ integrierbare Funktion ist und zweitens $A^{\alpha} e^{-A(t-s)} R(v(s),\cdot)$ für jedes $s \in [o,t)$ ein beschränkter linearer Operator ist.

Damit ist eine Lösung $u \in X$ von (1.10) gefunden. Weiterhin definiert die Zuordnung $v \longmapsto u$, wobei u die oben konstruierte Lösung bei festem v ist, eine Abbildung F im Banachraum X, die die Kugel B in sich abbildet.

Es wird nun gezeigt, daß F vollstetig ist.

1) F ist stetig.

Sei $\{v_k\} \subset B$ und $v_k \longrightarrow v$ in X

$$F(v_k) = u_k = \sum_{n=o}^{\infty} u_n^k \quad , \qquad F(v) = u = \sum_{n=o}^{\infty} u_n \; .$$

Man zeigt nun wiederum induktiv, daß für $n \geq 1$ gilt:

$$\|u_n^k(t) - u_n(t)\| \leq a_k \, \gamma_2 \, \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \; n \left(\frac{\gamma_2 \, R_d \, t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{n-1} \gamma_1 \, \|u_o\|$$

mit $\qquad a_k = \sup_{[0,T]} \|R(v_k(s),\cdot) - R(v(s),\cdot)\|$

und erhält:

$$\|F(v_k) - F(v)\|_X \leq a_k \, \frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{\gamma_2 \, R_d \, T^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{n-1} \gamma_1 \, \|u_o\| < \varepsilon,$$

falls $k > k_o(\varepsilon)$

da nach Voraussetzung über R $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = o$ gilt.

2) F ist kompakt.

Mit Hilfe von Lemma 1.3 kann leicht induktiv bewiesen werden, daß die Mengen

$$U_n = \{u_n \mid u_n(t) = \int_o^t A^\alpha e^{-A(t-s)} R(v(s),u_{n-1}(s))ds,\ v \in B,\ u_{n-1} \in U_{n-1}\}$$

für $n \geq 1$ relativ kompakt in X sind.

Es wird zuerst gezeigt, daß $F(B)(t_o) = \{u(t_o) \mid u \in F(B)\}$ für jedes $t_o \in [0,T]$ relativ kompakt in E ist.

Zu gegebenem $\varepsilon > o$ existiert N, so daß $\|u(t_o) - \sum_{n=o}^{N} u_n(t_o)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $u \in F(B)$ ist. N ist unabhängig von u, da die Majorante von $\sum_{n=o}^{\infty} \|u_n\|_X$ unabhängig von $v \in B$ ist (s. (1.11)). Wegen der relativen Kompaktheit von U_n in X ist natürlich $U_n(t_o) = \{u_n(t_o) \mid u_n \in U_n\}$ für jedes $t_o \in [0,T]$ relativ kompakt in E. Damit ist auch die Menge $\{\sum_{n=o}^{N} u_n(t_o) \mid u_n \in U_n\}$ relativ kompakt in E und damit auch $F(B)(t_o)$. Schließlich wird noch die gleichgradige Stetigkeit von F(B) bewiesen. Sei $\varepsilon > o$ vorgegeben. Es gibt wiederum ein N, so daß $\|u(t) - \sum_{n=o}^{N} u_n(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $t \in [0,T]$ und alle $u \in F(B)$ gilt.
Wegen der gleichgradigen Stetigkeit der Mengen U_n gilt
$\|u_n(t_1) - u_n(t_2)\| < \frac{\varepsilon}{3N}$, falls nur $|t_1-t_2| < \delta(\varepsilon)$, für alle $u_n \in U_n$, $n = 0,\dots,N$. Damit erhält man:

$$\|u(t_1) - u(t_2)\| \leq \|u(t_1) - \sum_{n=o}^{N} u_n(t_1)\| + \sum_{n=o}^{N} \|u_n(t_1) - u_n(t_2)\|$$

$$+ \|u(t_2) - \sum_{n=o}^{N} u_n(t_2)\| < \varepsilon\ , \text{ für alle } |t_1-t_2| < \delta(\varepsilon)$$

und für alle $u \in F(B)$.

Die Vollstetigkeit von F, das die Kugel B in sich abbildet, impliziert nach Schauder die Existenz eines Fixpunktes u in B, der natürlich die behauptete Lösung der Integralgleichung in $[0,T]$ ist.

(1.12) $R: E \to E$ ist stark folgenstetig.

Satz 1.6 R genüge (1.12) und es sei $o \le \alpha < 1$.

Dann besitzt die Integralgleichung

$$u(t) = e^{-At} u_o + \int_o^t A^\alpha e^{-A(t-s)} R(u(s))ds, \quad u_o \in E$$

eine stetige Lösung in einem Intervall $[0,T]$.

Beweis: Ist $\|R(v)\| \le R_d$ für $\|v\| \le d$, dann definiert man für $d > \gamma_1 \|u_o\|$

$$T = \left(\frac{(1-\alpha)(d-\gamma_1 \|u_o\|)}{\gamma_2 R_d} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Die Abbildung F in $X = C([0,T],E)$, definiert durch

$$F(v)(t) = e^{-At} u_o + \int_o^t A^\alpha e^{-A(t-s)} R(v(s))ds,$$

bildet dann die Kugel B um 0 mit Radius d (in X) stetig in sich ab. Die Kompaktheit von F folgt aus Lemma 1.4. Der Schaudersche Fixpunktsatz liefert dann die Existenz einer Lösung der Integralgleichung in $[0,T]$.

Der folgende Satz sagt etwas über die Fortsetzbarkeit der lokalen Lösungen aus:

Satz 1.7 Es sei $o \le \alpha < 1$ und die Integralgleichungen

(1.13) $$u(t) = e^{-At} u_o + \int_o^t A^\alpha e^{-A(t-s)} R(u(s), u(s))ds \quad \text{bzw.}$$

(1.14) $$u(t) = e^{-At} u_o + \int_o^t A^\alpha e^{-A(t-s)} R(u(s))ds$$

besitzen lokal - d.h. in einem Intervall $[0,T]$ - eine stetige Lösung. Dann besitzen sie eine stetige Lösung in einem maximalen Existenzintervall $[0,T_{max})$, wobei gilt:

$$\lim_{t\uparrow T_{max}} \|u(t)\| = \infty \text{ , falls } T_{max} < \infty \text{ ist.}$$

Beweis: Ist eine Lösung u lokal, d.h. in einem Intervall $[0,T]$, bestimmt, setzt man sie stetig fort, indem man lokal die Integralgleichung

$$\tilde{u}(t) = e^{-A(t-T)} u(T) + \int_T^t A^\alpha e^{-A(t-s)} R(\tilde{u}(s), \tilde{u}(s))ds$$

für $t \in [T,T_1]$, $T < T_1$, löst. $\tilde{u}$ ist die Fortsetzung von u auf $[0,T_1]$.

Die Behauptung des Satzes sieht man nun folgendermaßen ein:
Wäre $\overline{\lim\limits_{t\uparrow T_{max}}} \|u(t)\| < \infty$ für $T_{max} < \infty$, könnte man u im Punkte $t = T_{max}$ stetig als Lösung ergänzen und nach oben beschriebener Methode weiter fortsetzen. Das widerspräche aber der Maximalität von T_{max}.

Aufgrund dieses Satzes garantieren a-priori-Schranken die globale Existenz einer Lösung der Integralgleichung.
Ein Beispiel für einen Operator, der (1.9) erfüllt, ist ein Operator, der von einer Multilinearform erzeugt wird: $R(v,u) = R(v,\dots,v,u)$. Dabei ist $R(v_1,\dots,v_m,u)$ in den ersten m Variablen (separat) kompakt und in der letzten Variablen beschränkt. Insbesondere ist dann $u \longmapsto R(u,u)$ als Abbildung in E nicht notwendigerweise stark folgenstetig, wie folgendes Beispiel für $m = 1$ zeigt:

E sei ein separabler Hilbertraum und eine Banachalgebra mit Einheit e. K sei linear und kompakt in E. $R(v,u) = (K\ v)u$ genügt dann der Voraussetzung (1.9), ist aber als Operator in E nicht stark folgenstetig. Denn sei $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine orthonormale Basis in E und $u_o \in E$ derart, daß $K\ u_o = e$ ist. Dann konvergiert die Folge $\{u_n\} = \{e_n + u_o\}$ schwach gegen u_o in E, $(K\ u_n)u_n = = (K\ e_n)(e_n + u_o) + e_n + u_o$ konvergiert aber nicht stark in E.
Das bedeutet: (1.9) impliziert nicht (1.12).

Im folgenden werden vermöge $R(u,u) = R(u)$ die beiden Typen (1.13) und (1.14) zu der einen Integralgleichung

$$(1.15) \qquad u(t) = e^{-At}\, u_o + \int_o^t A^{\alpha}\, e^{-A(t-s)}\, R(u(s))ds$$

zusammengefaßt.

§ 3 Lokale Existenzsätze; Evolutionsgleichungen im Hilbertraum

Die in dieser Arbeit untersuchten Evolutionsgleichungen - oder Differentialgleichungen - im Hilbertraum sind von der Form

$$(1.16)' \quad \frac{d}{dt}\, v(t) = -A\ v(t) + F(v(t)) \ , \qquad v(o) = v_o$$

mit dem in § 1 eingeführten linearen Operator A und einem nichtlinearen Operator F. Dabei soll im folgenden $\frac{d}{dt}$ stets für die starke Differentation in E stehen.

Setzt man nun $R = A^{-\alpha_1} \circ F \circ A^{-\alpha_2}$, $v(t) = A^{-\alpha_2}\, u(t)$ und $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ kann diese Differentialgleichung in der Form

$$(1.16) \quad \frac{d}{dt}\, A^{-\alpha} u(t) = -A^{1-\alpha} u(t) + R(u(t)) \ , \qquad u(o) = u_o$$

geschrieben werden. Und hier wird jetzt der Zusammenhang zur Integralgleichung (1.15) deutlich. Denn ausgehend von (1.15) erhält man nach Anwendung von $A^{-\alpha}$ und "formaler Differentation" (1.16).

Zum Zusammenhang zwischen (1.16)' und (1.16) sei noch folgendes bemerkt: Eine Lösung v von (1.16)' liefert auch mittels der oben beschriebenen Substitutionen eine Lösung u von (1.16) (was man auch unter einer Lösung verstehen mag).

(1.16) hingegen hat bereits einen Sinn, falls $u(t) \in D(A^{1-\alpha})$ oder $v(t) \in D(A^{1-\alpha_1})$ ist. Verlangt man von einer Lösung von (1.16)', daß sie in D(A) liegt, so genügt es also nicht, (1.16) zu lösen. Gelingt es aber zu zeigen, daß $\frac{d}{dt} A^{-\alpha_1} v = A^{-\alpha_1} D_t v$ für eine "schwächere" Differentiation D_t gilt, ist $v \in D(A)$ und Lösung von

$$D_t\, v(t) = -A\, v(t) + F(v(t)), \qquad v(o) = v_o .$$

Doch mehr dazu in § 5. Ist allerdings $\alpha_1 = o$, so sind (1.16)' und (1.16) äquivalent.

Zunächst soll in diesem Paragraphen gezeigt werden, daß unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen an R eine stetige Lösung von (1.15) auch Lösung von (1.16) in adäquatem Sinne ist, d.h. die "formale Differentation" gerechtfertigt ist.

<u>Definition 1.8:</u> Eine Abbildung $u: [0,T) \to E$ heißt <u>strikte Lösung</u> von (1.16) im Intervall (0,T), falls gilt:

a) $u \in C([0,T),E)$

b) $u(t) \in D(A^{1-\alpha})$ für $t \in (0,T)$

c) $A^{-\alpha} u \in C_1((0,T),E)$

d) $A^{1-\alpha} u \in C((0,T),E)$

e) u erfüllt (1.16) in (0,T) und $u(o) = u_o$.

Die Abbildung heißt strikte Lösung von (1.16) im Intervall $[0,T)$, falls b) - e) im Intervall $[0,T)$ gilt. (Dabei gilt für $t = o$ die rechtseitige Ableitung $\frac{d^+}{dt}$.)

<u>Lemma 1.9</u> (Phillips, [42],[25] p.486) Sei $u \in E$ und $o \leq r < t$.

Dann ist

$$\int_r^t e^{-A(t-s)} u \, ds \in D(A) \qquad \text{und}$$

$$-A \int_r^t e^{-A(t-s)} u \, ds = (e^{-A(t-r)} - I)u.$$

<u>Lemma 1.10</u> (s. [21]) Jede stetige Lösung der Integralgleichung (1.15) ist in jedem abgeschlossenen Intervall $[\theta,T_1]$, $\theta > o$, ihres Existenzintervalls hölderstetig mit einem Exponenten $\gamma < 1-\alpha$.

Ist $u_o \in D(A^\gamma)$, dann gilt die Aussage für jedes abgeschlossene Intervall $[0,T_1]$ des Existenzintervalls.

<u>Beweis:</u> Sei $h > o$.

$$u(t+h) - u(t) = (e^{-Ah} - I)e^{-At}u_o + (e^{-Ah} - I) \int_o^t A^\alpha e^{-A(t-s)} R(u(s))ds$$

$$+ \int_t^{t+h} A^\alpha e^{-A(t+h-s)} R(u(s))ds$$

Wegen der Stetigkeit von u auf $[0,T_1]$ folgt $||u(t)|| \leq C(T_1)$ und wegen der Stetigkeit von R(u) $||R(u(s))|| \leq R_{C(T_1)}$ für alle $s \in [0,T_1]$. Weiterhin gilt: $||(e^{-Ah} - I)A^{-\gamma}u|| \leq \gamma_2 \frac{1}{\gamma} h^\gamma ||u||$ für alle $u \in E$, was mittels Lemma 1.8 und

(1.4) folgt.

Damit erhält man:

$$\|u(t+h) - u(t)\| \leq \|(e^{-Ah} - I)A^{-\gamma} (A^{\gamma} e^{-At} u_o)\|$$

$$+ \|(e^{-Ah} - I) A^{-\gamma} \int_o^t A^{\alpha+\gamma} e^{-A(t-s)} R(u(s))ds\|$$

$$+ \int_t^{t+h} \|A^{\alpha} e^{-A(t+h-s)} R(u(s))\| ds$$

$$\leq \gamma_2^2 \frac{t^{-\gamma}\|u_o\|}{\gamma} h^{\gamma} + \gamma_2^2 \frac{R_{C(T)} t^{1-(\alpha+\gamma)}}{\gamma(1-(\alpha+\gamma))} h^{\gamma} + \gamma_2 \frac{R_{C(T)}}{1-\alpha} h^{1-\alpha}$$

$$\leq c_1 h^{\gamma} \quad \text{für } t \in [\theta,T_1], \quad c_1 = c_1(\theta).$$

Die letzte Behauptung wird klar aus diesen Abschätzungen.

$$(1.17) \quad \begin{cases} R:E \to E \text{ ist stetig} \\ \|R(u) - R(v)\| \leq \gamma_3(C) \|u-v\|^{\beta}, \quad o < \beta \leq 1, \\ \text{für alle } u,v \in E \text{ mit } \|u\|, \|v\| \leq C. \end{cases}$$

Satz 1.11 Für R gelte (1.17). Dann ist jede im Intervall $[0,T)$ stetige Lösung der Integralgleichung (1.15) eine strikte Lösung der Differentialgleichung (1.16) im Intervall $(0,T)$.

Ist darüber hinaus $u_o \in D(A^{1-\alpha})$, dann ist u eine strikte Lösung von (1.16) im Intervall $[0,T)$.

Beweis: Zunächst kann die Lösung u von (1.15) folgendermaßen zerlegt werden:

$$u(t) = e^{-A(t-\theta)}u(\theta) + \int_{\theta}^{t} A^{\alpha} e^{-A(t-s)} R(u(s))ds \quad , \theta > o, \ t > \theta,$$

$$= S_1(t) + S_2(t)$$

$S_1(t) \in D(A)$ und $\frac{d}{dt} \; A^{-\alpha} \; S_1(t) = -A \; e^{-A(t-\theta)} A^{-\alpha} \; u(\theta)^{\cdot} = -A^{1-\alpha} S_1(t)$

für $t \in (\theta, T_1]$ woraus b) - d) aus Definition 1.8 für S_1 folgt.

$$S_2(t) = -\int_\theta^t A^\alpha \; e^{-A(t-s)}(R(u(t)) - R(u(s))ds + \int_\theta^t A^\alpha \; e^{-A(t-s)} \; R(u(t))ds$$

$$= \gamma_1(t) + \gamma_2(t) \; .$$

Nach dem Lemma 1.9 ist $\gamma_2(t) \in D(A^{1-\alpha})$ und für γ_1 folgt aus der Abschätzung (s. Lemma 1.10 und (1.17))

$$(1.18) \quad \int_\theta^t \|A \; e^{-A(t-s)}(R(u(t))-R(u(s)))\| ds \le \gamma_2\gamma_3(C(T_1))c_1 \int_\theta^t (t-s)^{-1}(t-s)^{\beta\gamma} ds < \infty,$$

und der Abgeschlossenheit von $A^{1-\alpha}$, daß $\gamma_1(t) \in D(A^{1-\alpha})$ für $t \in (\theta, T_1]$, $T_1 < T$, ist.

Die Stetigkeit von $A^{1-\alpha} \; S_2$ in $(\theta, T_1]$ folgt aus der Stetigkeit von $A^{1-\alpha}\gamma_2$ (s. Lemma 1.9 und beachte, daß $R(u(t))$ stetig ist) und der Stetigkeit von

$A^{1-\alpha} \gamma_1(t) = \int_\theta^t A \; e^{-A(t-s)}(R(u(t)) - R(u(s)))ds$, welche aus der Abschätzung (1.18) und mittels der gleichen Technik wie beim Beweis des Lemmas 1.3 folgt.

Damit ist für u bereits b) und d) aus Definition 1.8 bewiesen.

Für $h > o$ folgt weiter:

$$\frac{1}{h} (A^{-\alpha} S_2(t+h) - A^{-\alpha} \; S_2(t)) = \frac{1}{h} (e^{-Ah} - I) \int_\theta^t e^{-A(t-s)} \; R(u(s))ds$$

$$+ \frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{-A(t+h-s)} \; R(u(s))ds$$

$$= \frac{1}{h}\,(e^{-Ah} - I)\, A^{-\alpha}\, S_2(t) + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{-A(t+h-s)}\, R(u(t))ds$$

$$- \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{-A(t+h-s)}\, (R(u(t)) - R(u(s)))ds\ .$$

Unter Anwendung von Lemma 1.9 gilt:

$$\lim_{h\downarrow o} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{-A(t+h-s)}\, R(u(t))ds = - \lim_{h\downarrow o} (e^{-Ah} - I)A^{-1}\, R(u(t)) = R(u(t))\ .$$

Wegen der Abschätzung

$$\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{-A(t+h-s)}(R(u(t)) - R(u(s)))ds\right\| \leq \gamma_1\gamma_3\, c_1\, \frac{h^{\beta\gamma}}{\beta\gamma+1}$$

und der Tatsache, daß $A^{-\alpha}\, S_2(t) \in D(A)$ ist, folgt schließlich:

$$\frac{d^+}{dt}\, A^{-\alpha}\, S_2(t) = -A^{1-\alpha}\, S_2(t) + R(u(t)), \qquad t \in (\theta, T_1).$$

Da diese rechtseitige Ableitung nach dem zuvor gezeigten stetig ist, folgt

$$\frac{d^+}{dt}\, A^{-\alpha}\, S_2(t) = \frac{d}{dt}\, A^{-\alpha}\, S_2(t) \qquad (\text{s. } [25]\text{p. } 492),$$

womit der erste Teil des Satzes 1.11 bewiesen ist.

Sei nun $u_o \in D(A^{1-\alpha})$. Es ist

$$\frac{1}{h}\,(A^{-\alpha}\, u(h) - A^{-\alpha}\, u_o) = \frac{1}{h}\,(e^{-Ah} - I)\, A^{-\alpha}\, u_o + \frac{1}{h}\int_o^{h} e^{-A(h-s)}\, R(u(s))ds,$$

so daß unter Berücksichtigung des Zusatzes von Lemma 1.10 genau wie oben folgt:

$$\frac{d^+}{dt}\, A^{-\alpha}\, u(o) = -A^{1-\alpha}\, u(o) + R(u(o)).$$

Wiederum wegen des Zusatzes zu Lemma 1.10 gilt:

$$\|A^{1-\alpha} u(t) - A^{1-\alpha} u_o\| \leq \|(e^{-At} - I)A^{1-\alpha} u_o\| + \|A \int_o^t e^{-A(t-s)} R(u(t))ds\|$$

$$+ \|\int_o^t A\, e^{-A(t-s)}(R(u(t)) - R(u(s)))ds\|$$

$$\leq \|(e^{-At} - I)A^{1-\alpha} u_o\| + \|(e^{-At} - I)R(u(t))\|$$

$$+ \gamma_2\gamma_3(C(T_1)c_1\, t^{\beta\gamma} < \varepsilon \quad \text{für } t < \delta(\varepsilon).$$

(Beachte, daß $\{R(u(t)) \mid t \in [0,T_1]\}$ ein Kompaktum in E ist, so daß zur Abschätzung des zweiten Terms Korollar 1.2 herangezogen werden kann.)
Das bedeutet aber die Stetigkeit von $A^{1-\alpha}u$ und $\frac{d}{dt} A^{-\alpha}u$ in $[0,T)$, womit Satz 1.11 vollständig bewiesen ist.

Die Voraussetzung (1.17) ("Stetigkeitseigenschaft") kann durch eine "Regularitätseigenschaft" von R ersetzt werden:

$$(1.19) \quad \begin{cases} R:E \to E \text{ ist stetig,} \\ R(u) \in D(A^{\varepsilon}) \quad \text{für alle } u \in E,\ \varepsilon > o \text{ (fest),} \\ A^{\varepsilon} \circ R:E \to E \text{ ist stetig.} \end{cases}$$

<u>Satz 1.12</u> Für R gelte (1.19). Dann ist jede im Intervall $[0,T)$ stetige Lösung u der Integralgleichung (1.15) eine strikte Lösung der Differentialgleichung (1.16) im Intervall $(0,T)$.
Ist darüber hinaus $u_o \in D(A^{1-\alpha})$, dann ist u eine strikte Lösung von (1.16) im Intervall $[0,T)$.

<u>Beweis:</u> Wegen der Stetigkeit von u auf $[0,T_1]$, $T_1 < T$, folgt wegen (1.19):

$\|A^{\varepsilon}R(u(s))\| < \tilde{R}_{C(T_1)}$ für alle $s \in [0,T_1]$.

Wegen der Abschätzung

$$\int_0^t \|A\, e^{-A(t-s)}\, R(u(s))\|\, ds \le \gamma_2\, \tilde{R}_{C(T_1)} \int_0^t (t-s)^{-1+\varepsilon} ds < \infty, \quad t \in [0,T_1],$$

ist $\quad \int_0^t A^{\alpha}\, e^{-A(t-s)}\, R(u(s))ds \in D(A^{1-\alpha}) \quad$ und

$$A^{1-\alpha} \int_0^t A^{\alpha}\, e^{-A(t-s)}\, R(u(s))ds = \int_0^t A\, e^{-A(t-s)}\, R(u(s))ds \text{ ist stetig in}$$

$[0,T_1]$. (s. Technik beim Beweis von Lemma 1.3.)

Sei nun $h > o$; dann folgt wie beim Beweis des Satzes 1.11 für $t \in (0,T_1)$:

$$\begin{aligned}\frac{d^+}{dt} A^{-\alpha}\, u(t) &= \lim_{h\downarrow o} \frac{1}{h} (e^{-Ah} - I)(e^{-At}\, A^{-\alpha}\, u_o + \int_o^t e^{-A(t-s)}\, R(u(s))ds) \\ &+ \lim_{h\downarrow o} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{-A(t+h-s)}\, R(u(s))ds \\ &= -A^{1-\alpha}\, u(t) + R(u(t)) - \lim_{h\downarrow o} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{-A(t+h-s)} (R(u(t))-R(u(s)))ds\ .\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von R(u(t)) gilt:

$$\left\|\frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{-A(t+h-s)} (R(u(t))-R(u(s)))ds\right\| \le \gamma_1\, \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|R(u(t)) - R(u(s))\|\, ds$$

$$< \varepsilon\ , \text{ sofern nur } h < \delta(\varepsilon).$$

Also erhält man:

$$\frac{d^+}{dt}\, A^{-\alpha}\, u(t) = -A^{1-\alpha}\, u(t) + R(u(t)) \quad , \qquad t \in (0,T_1).$$

Gleicher Schluß wie beim Beweis des Satzes 1.11 liefert schließlich die erste Behauptung.
Für $u_o \in D(A^{1-\alpha})$ gelten alle Aussagen auch für $t = o$, da dann $A^{-\alpha} u_o$ in $D(A)$ gelegen ist.
Damit ist Satz 1.12 bewiesen.

Nimmt man die Sätze 1.11 oder 1.12 mit den Sätzen 1.5 oder 1.6 zusammen, so erhält man lokale Existenzsätze für strikte Lösungen u der Evolutionsgleichung (1.16). Insbesondere kann dann in den Sätzen 1.11 und 1.12 $T = T_{max}$ im Sinne von Satz 1.7 gesetzt werden.

Der Vollständigkeit halber sei noch die Hölderstetigkeit von $A^{1-\alpha} u$ erwähnt:
u sei stetige Lösung von (1.15) auf $[0,T)$ mit beliebigem $u_o \in E$.

1) Für R gelte (1.17). Dann ist $A^{1-\alpha} u$ hölderstetig auf $[\theta,T_1]$, $\theta > o$, $T_1 < T$, mit einem Exponenten $\mu < \beta\gamma$, $\gamma < 1-\alpha$. Weiter ist $\|A^{\delta-\alpha} u\| = O(t^{\alpha-\delta})$ für $t \downarrow o$ mit $o \leq \delta < 1$.

2) Für R gelte (1.19). Dann ist $A^{1-\alpha}$ hölderstetig auf $[\theta,T_1]$ mit einem Exponenten $\mu < \varepsilon$. Weiter ist $\|A^{\delta-\alpha} u\| = O(t^{\alpha-\delta})$ für $t \downarrow o$ mit $o \leq \delta < 1$.

Ist $u_o \in D(A^{1-\alpha+\mu})$, gilt die Hölderstetigkeit in beiden Fällen im Intervall $[0,T_1]$.
Zum Beweis von 1) wird auf [21] p. 280 ff. verwiesen. Für 2) beachte man die Darstellung $A^{1-\alpha} u(t) = A^{1-\alpha} e^{-At} u_o + \int_o^t A^{1-\varepsilon} e^{-A(t-s)} A^{\varepsilon} R(u(s))ds$

und verfahre für $v = A^{1-\alpha} u$ wie beim Beweis des Lemmas 1.10.

§ 4 Eindeutigkeit der Lösung

Satz 1.13 R genüge (1.17) mit $\beta = 1$, d.h. R sei lokal lipschitzstetig. Dann ist die stetige Lösung der Integralgleichung (1.15) auf $[0,T)$ eindeutig bestimmt.

Beweis: Klar

Um einen Eindeutigkeitssatz auch für die Evolutionsgleichung (1.16) zu bekommen, genügt es zu zeigen, daß - innerhalb einer gewissen Funktionenklasse - jede Lösung von (1.16) auch Lösung der Integralgleichung ist.

Satz 1.14 (s. [25], p. 486) $R:E \to E$ sei stetig und u sei strikte Lösung von (1.16) im Intervall $(0,T)$. Dann ist u stetige Lösung der Integralgleichung (1.15).

Beweis: Ausgehend von $\frac{d}{dt} A^{-\alpha} u = -A^{1-\alpha} u + R(u)$, $u(o) = u_o$ erhält man für $o < s \leq t < T$ (s. [25], p. 481):

$$\frac{d}{ds} e^{-A(t-s)} A^{-\alpha} u(s) = e^{-A(t-s)} \frac{d}{ds}(A^{-\alpha} u(s)) + e^{-A(t-s)} A^{1-\alpha} u(s)$$

$$= e^{-A(t-s)} R(u(s))$$

Das zeigt zunächst die Stetigkeit von $\frac{d}{ds} e^{-A(t-s)} A^{-\alpha} u(s)$ im Intervall $[0,T)$ und Integration über $[0,t]$ und Anwendung von A^{α} ergibt dann die Behauptung.

§ 5 Verallgemeinerung des Lösungsbegriffes

Der Begriff der "strikten" Lösung ist zu stark, um im allgemeinen den Übergang von (1.16) zu (1.16)' zu erzielen. Es liegt daher nahe, die Existenz und Stetigkeit der Ableitung nach t in einer schwächeren Topologie zu fordern.

In der Literatur finden sich derartige Abschwächungen des Lösungsbegriffes: in [6] wird bereits die Lösung der Integralgleichung als "milde" Lösung der Differentialgleichung bezeichnet. Eine Funktion $u \in C([0,T],E)$ wird "schwache" Lösung von (1.16) in (0,T) bezeichnet, falls

$$-\int_o^T (A^{-\alpha} u(t), \frac{d}{dt}\phi(t))dt = (A^{-\alpha} u_o, \phi(o)) - \int_o^T (A^{-\alpha} u(t), A^*\phi(t))dt$$
$$+ \int_o^T (R(u(t)), \phi(t))dt$$

für alle $\phi \in C_1([0,T],E)$ mit $\phi(T) = o$, $\phi(t) \in D(A^*)$, gilt. (s. [9] ,[28])

Es ist klar, daß eine strikte Lösung sowohl "milde" als auch "schwache" Lösung ist.

Dieser Weg soll aber nicht weiter verfolgt werden; vielmehr soll die zuerst angedeutete Möglichkeit näher beleuchtet werden.

Für das folgende wird A^{-1} als kompakt vorausgesetzt.

(1.20) $F: D(A^{\beta}) \longrightarrow E$ sei schwach folgenstetig, $o \leq \beta < 1$, d.h. $v_n \rightharpoonup v$ in $D(A^{\beta})$ impliziert $F(v_n) \rightharpoonup F(v)$ in E. (Dabei ist $D(A^{\beta})$ Banachraum mit der Norm $\|A^{\beta} \cdot\|$

<u>Satz 1.15</u> F genüge (1.20) und es sei $u_o \in D(A^\beta)$. Dann gibt es ein $u \in C([0,T), D(A^\beta))$, das strikte Lösung von

$$(1.21) \quad \frac{d}{dt} A^{-\varepsilon} u(t) = -A^{1-\varepsilon} u(t) + A^{-\varepsilon} F(u(t)), \; u(o) = u_o$$

für <u>jedes</u> $\varepsilon \in (o, 1-\beta)$ in $(0,T)$ ist.

<u>Beweis:</u> $R = A^{-\varepsilon} \circ F \circ A^{-\beta}$ ist wegen der Kompaktheit von $A^{-\varepsilon}$ (s. [14], p. 170) stark folgenstetig in E und genügt (1.19). Deshalb besitzt die Integralgleichung

$$v(t) = e^{-At} A^\beta u_o + \int_o^t A^\beta e^{-A(t-s)} F(A^{-\beta} v(s)) ds$$

$$= e^{-At} A^\beta u_o + \int_o^t A^{\beta+\varepsilon} e^{-A(t-s)} R(v(s)) ds$$

eine stetige Lösung, die strikte Lösung von

$$\frac{d}{dt} A^{-\varepsilon} A^{-\beta} v(t) = -A^{1-\varepsilon} A^{-\beta} v(t) + R(v(t)), \qquad v(o) = A^\beta u_o$$

ist (Sätze 1.6 und 1.12). $u = A^{-\beta} v$ ist dann die behauptete Lösung von (1.21).

Es ist das Ziel, eine Lösung von (1.21) mit $\varepsilon = o$ nachzuweisen. Für solch allgemeine Abbildung F (1.20) ist mir dies nicht gelungen; im Hinblick auf das Gegenbeispiel in [42] p. 220 scheint mir das <u>allgemein</u>, nur mittels der Halbgruppentheorie, auch fast aussichtslos.

Unter einer Zusatzvoraussetzung für F ist das (unter Abschwächung des Lösungsbegriffes wie eingangs angedeutet) möglich:

$$(1.22) \qquad \begin{cases} F(u) \in D(A^\delta) & \text{für alle } u \in D(A),\ \delta > o \text{ (fest)}, \\ A^\delta \circ F : D(A^\beta) \longrightarrow E \text{ ist stetig mit } D(A^\delta \circ F) = D(A). \end{cases}$$

<u>Satz 1.16</u> F genüge (1.20) und (1.22) und es sei $u_o \in \dot{D}(A^\beta)$.
Dann gibt es eine Funktion $u \in C([0,T), D(A^\beta))$, die Lösung von

$$(1.23) \qquad D_t\, u(t) = -A\, u(t) + F(u(t)), \qquad u(o) = u_o$$

im folgenden Sinne ist:

a) $u(t) \in D(A)$, $t \in (0,T)$

b) Die Ableitung $D_t u$ in der schwachen Topologie von E existiert in (0,T) und ist schwach stetig.

c) (1.23) ist erfüllt in (0,T)

d) $\lim\limits_{t\to T} \|A^\beta\, u(t)\| = \infty$, falls $T < \infty$ ist.

Ist $F: D(A^\beta) \to E$ <u>stetig</u>, dann ist u strikte Lösung in (0,T) von

$$\frac{d}{dt}\, u(t) = -A\, u(t) + F(u(t), \qquad u(o) = u_o.$$

<u>Beweis:</u> Es wird zuerst gezeigt, daß eine Lösung von (1.21) derart existiert, daß $u(t) \in D(A)$ und A u auf (0,T) stetig ist.*) Wegen Lemma 1.4 ist jede Abbildung der Schar $\{G_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (o,1-\beta)}$ in $X = C([0,T_o],E)$, definiert durch:

$$G_\varepsilon(v)(t) = e^{-At}\, A^\beta\, u_o + \int_o^t A^\beta\, e^{-A(t-s)}\, A^{-\varepsilon} F(A^{-\beta}\, v(s))ds \quad ,$$

vollstetig in X und bildet für geeignetes T_o die Kugel B um O mit Radius d in sich ab (s. Beweis zu Lemma 1.6).

Die Abbildung G in X wird definiert durch:

$$G(v)(t) = e^{-At} A^\beta\, u_o + \int_o^t A^{\beta+\varepsilon}\, e^{-A(t-s)}\, A^{-\varepsilon}\, F(A^{-\beta}\, v(s))ds \; .$$

G ist unabhängig von ε und ebenfalls vollstetig in X.

---

*) Das ist die entscheidende Aussage, aus der der Rest der Behauptung dieses Satzes folgt. Gelingt es im konkreten Fall, etwa aufgrund von Regularitätssätzen, nachzuweisen, daß die Lösung von (1.21) in D(A) liegt, so ist die Voraussetzung (1.22) entbehrlich.

Nun ist für $v \in B$:

$$\|G_\varepsilon(v)(t) - G(v)(t)\| \leq \gamma_2 \int_o^t (t-s)^{-\beta} \|A^{\varepsilon} - I\| \, \|F(A^{-\beta} v(s))\| \, ds$$

$$\leq \gamma_2 F_d \|A^{-\varepsilon} - I\| \frac{T_o^{1-\beta}}{1-\beta} < \delta(\varepsilon)$$

mit $\lim_{\varepsilon \downarrow o} \delta(\varepsilon) = o$, da $F \circ A^{-\beta}$ beschränkt ist und $A^{-\varepsilon} \to I$ in der gleichmäßigen Operatornorm gilt.

Das bedeutet weiter, daß $\|G_\varepsilon(v) - G(v)\|_X < \delta(\varepsilon)$ für alle $v \in B$ ist. Wegen der Vollstetigkeit von G_ε für jedes $\varepsilon > o$ existiert ein Fixpunkt v_ε für jedes $\varepsilon > o$: $G_\varepsilon(v_\varepsilon) = v_\varepsilon$. $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sei eine Nullfolge. Dann existiert wegen der Vollstetigkeit von G eine Teilfolge $\{\varepsilon_n\}$, so daß $G(v_{\varepsilon_n}) \to v$ in X gilt.

Damit hat man:

$$\|v_{\varepsilon_n} - v\|_X \leq \|G_{\varepsilon_n}(v_{\varepsilon_n}) - G(v_{\varepsilon_n})\|_X + \|G(v_{\varepsilon_n}) - v\|_X \to o$$

und

$$\|G(v) - v\|_X \leq \|G(v) - G(v_{\varepsilon_n})\|_X + \|G(v_{\varepsilon_n}) - G_{\varepsilon_n}(v_{\varepsilon_n})\|_X + \|v_{\varepsilon_n} - v\|_X \to o$$

Das heißt: $G(v) = v$ oder $u = A^{-\beta} v$ ist die Lösung von (1.21) (s. Beweis zu Satz 1.15). Wegen Satz 1.12 ist $v_{\varepsilon_n}(t) \in D(A^{1-\beta})$ für jedes ε_n und jedes $t \in (0,T_o]$. Damit ist $A^{-\beta} v_{\varepsilon_n}(t) \in D(A)$ und $A^{-\beta} v_{\varepsilon_n}(t)$ konvergiert gegen $u(t)$ für jedes $t \in (0,T_o]$.

Weiter ist:

$$A^{1-\beta} v_{\varepsilon_n}(t) - A^{1-\beta} v_{\varepsilon_m}(t)$$

$$= \int_o^t (A^{1-\varepsilon_n-\delta} - A^{1-\varepsilon_m-\delta}) \, e^{-A(t-s)} A^{\delta} F(A^{-\beta} v_{\varepsilon_n}(s)) ds$$

$$+ \int_o^t A^{1-\varepsilon_m-\delta} e^{-A(t-s)} (A^{\delta} F(A^{-\beta} v_{\varepsilon_n}(s)) - A^{\delta} F(A^{-\beta} v_{\varepsilon_m}(s))) ds$$

woraus aufgrund der Voraussetzungen über F und der Tatsache, daß $\{v_{\varepsilon_n}\}$ eine Cauchy-Folge in X ist, folgt:

$$\|A^{1-\beta} v_{\varepsilon_n}(t) - A^{1-\beta} v_{\varepsilon_m}(t)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } n,m > n_o(\varepsilon)$$

Damit ist wegen der Abgeschlossenheit von A $u(t) \in D(A)$, $t \in (0,T_o]$, nachgewiesen. Wegen

$$A\, u(t) = A\, e^{-At} u_o + \int_o^t A^{1-\delta} e^{-A(t-s)} A^{\delta} F(u(s))ds$$

ist A u stetig auf $(0,T_o]$. (Beachte: $u \in C([0,T_o], D(A^{\beta}))$)

Da $u(t) \in D(A)$ gilt, ist der Differenzenquotient mit $h > o$:

$$(1.24) \quad \frac{1}{h}(u(t+h)-u(t)) = \frac{1}{h}(e^{-Ah} - I)u(t) + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{-A(t+h-s)} F(u(s))ds$$

für $h \downarrow o$ beschränkt in E.

Da $\frac{d}{dt} A^{-\varepsilon} u(t)$, $t \in (0,T_o]$, existiert, erhält man für jedes $\phi \in E$:

$$\lim_{h\downarrow o} (A^{-\varepsilon}\frac{1}{h} (u(t+h) - u(t)), \phi) = (\frac{d}{dt} A^{-\varepsilon} u(t), \phi)$$

$$= \lim_{h\downarrow o} (\frac{1}{h} (u(t+h) - u(t)), (A^{-\varepsilon})^*\phi) = (D_t^+ u(t), (A^{-\varepsilon})^*\phi)$$

$$= (A^{-\varepsilon} D_t^+ u(t), \phi),$$

da $D((A^{\varepsilon})^*)$ dicht in E und der Differenzenquotient beschränkt ist, was $\frac{d}{dt} A^{-\varepsilon} u(t) = A^{-\varepsilon} D_t^+ u(t)$ impliziert und wegen (1.21)

$$A^{-\varepsilon} D_t^+ u(t) = -A^{1-\varepsilon} u(t) + A^{-\varepsilon} F(u(t) \qquad \text{oder}$$

$$D_t^+ u(t) = -A\, u(t) + F(u(t)).$$

Wegen der schwachen Stetigkeit der rechten Seite in $(0,T_o]$ ist:

$$D_t^+ u(t) = D_t u(t) \qquad \text{(s. [25] p. 492, 138)} .$$

Diese lokale Lösung läßt sich mittels der gleichen Methode auf $[0,T)$ fortsetzen, so daß d) gilt.

Ist $F:D(A^\beta) \longrightarrow E$ stetig, folgt aus (1.24), daß $D_t^+ = \frac{d^+}{dt}$ gilt, und wegen der Stetigkeit von $A\,u$ und $F(u)$ ist schließlich $\frac{d^+}{dt} = \frac{d}{dt}$.

§ 6 Ergänzungen und Kommentare

In § 3 wurde ersichtlich, daß eine "Regularisierung" der Anfangsbedingung u_o, nämlich $u_o \in D(A^{1-\alpha})$, eine strikte Lösung im halb abgeschlossenen Intervall $[0,T)$ impliziert (s. Sätze 1.11 und 1.12). Eine weitergehende Einschränkung von u_o bringt (lokal) eine weitere Regularisierung der Lösung u, was die Abhängigkeit von t betrifft, mit sich. Dazu muß für die Nichtlinearität R folgendes vorausgesetzt werden:

$$(1.25)\quad \begin{cases} R:E \times E \to E \text{ genügt (1.9)} \\ R(v+h,\, u) = R(v,u) + R'(v,h,u) + \omega(v,h,u) \\ \text{für alle } v,u \in E \text{ mit } \lim\limits_{h \downarrow o} \dfrac{\omega(v,h,u)}{\|h\|} = o \\ R'(v,\cdot,\cdot) \text{ ist für jedes } v \in E \text{ bilinear und beschränkt} \\ R'(\cdot,\cdot,u) \text{ ist für jedes } u \in E \text{ als Abbildung von } E \times E \text{ in } E \text{ stark} \\ \text{folgenstetig (d.h. } v_n \longrightarrow v,\ h_n \longrightarrow h \text{ impliziert} \\ R'(v_n,h_n,u) \to R'(v,h,u) \text{ für jedes } u \in E.) \\ \text{Die Abbildung } v \to R'(v,\cdot,\cdot) \text{ ist als Abbildung von } E \text{ in} \\ \mathcal{L}(E \times E,E) \text{ stetig} \end{cases}$$

Ein Beispiel für einen Operator R, der (1.25) erfüllt, ist der bereits auf Seite 16 erwähnte multilineare Operator $R(v,u) = R(v,\dots,v,u)$, der in den ersten Variablen kompakt und in der letzten beschränkt ist.
Dann gilt:

Satz 1.17 R erfülle (1.25). Weiter sei $u_o \in D(A)$ und $R(u_o) \in D(A^\alpha)$ mit $o \leq \alpha < 1$. (Dabei ist $R(u,u) = R(u)$ vereinbart.) Dann besitzt die Evolutionsgleichung (1.16)

$$\frac{d}{dt} A^{-\alpha} u(t) = -A^{1-\alpha} u(t) + R(u(t)), \qquad u(o) = u_o$$

eine strikte Lösung in einem Intervall $[0,T)$ und es gilt zusätzlich:
$u \in C_1([0,T),E)$.

Da (1.25) die Voraussetzung (1.17) mit $\beta = 1$ impliziert, kann man folgern:
Diese lokale Lösung von (1.16) läßt sich als Lösung der Integralgleichung (1.15) gemäß Satz 1.7 zu einer Lösung u in $[0,T_{max})$ fortsetzen. Satz 1.11 sagt aus, daß diese Lösung u in $[0,T_{max})$ eine strikte Lösung von (1.16) in $[0,T_{max})$ ist. Zusammen mit den Eindeutigkeitssätzen 1.13 und 1.14 bedeutet obiger Satz tatsächlich eine "lokale Regularisierung" in Abhängigkeit von der Anfangsbedingung u_o der (eindeutigen) strikten Lösung von (1.16) in $[0,T_{max})$.

Der Beweis von Satz 1.17 soll nur skizziert werden:
Es werden die gleichen Bezeichnungen wie beim Beweis von Satz 1.5 gewählt. Für festes $v \in C_1([0,T],E)$, $v(o) = u_o$, gehören die Iterierten u_n zu $C_1([0,T],E)$. Für u_o ist das wegen $u_o \in D(A)$ klar und für $n \geq 1$ folgt das induktiv aufgrund der Darstellung (s. [42] p. 215 f.)

$$\frac{d}{dt} u_n(t) = \int_o^t A^\alpha e^{-A(t-s)} \frac{d}{ds} R(v,(s), u_{n-1}(s))ds + \delta_{1n} e^{-At} A^\alpha R(u_o),$$

wobei für $n = 1$ $R(u_o) \in D(A^\alpha)$ benutzt wird.

Außerdem gilt: $u_n(t) \in D(A^{1-\alpha})$ für $t \in [0,T]$ und

$$\frac{d}{dt} A^{-\alpha} u_n(t) = -A^{1-\alpha} u_n(t) + R(v(t), u_{n-1}(t)), \qquad n \geq o,\ u_{-1} = o,\ t \in [0,T]$$

Weiter ist $u = \sum_{n=o}^{\infty} u_n \in C_1([0,T],E)$ und löst

$$(1.26) \quad \frac{d}{dt} A^{-\alpha} u(t) = -A^{1-\alpha} u(t) + R(v(t), u(t)), \qquad u(o) = u_o .$$

Die Abbildung $F_1 : C_1([0,T],E) \to C_1([0,T],E)$, die jedem v die oben konstruierte Lösung von (1.24) zuordnet, bildet die abgeschlossene, beschränkte und konvexe Menge

$$B_1 = \{v \mid v \in C_1([0,T],E),\ v(o) = u_o,\ \|v\|_X \leq d,\ \|\tfrac{d}{dt}v\|_X \leq d'\}$$

mit geeigneten positiven Zahlen d, d' in sich ab.

Die Vollstetigkeit von F_1 als Abbildung in $C_1([0,T],E)$ zeigt man wie beim Beweis des Satzes 1.5, wobei man die Vollstetigkeit von F_1 in $C([0,T],E)$, die Darstellung

$$\frac{d}{dt} R(v(t), u(t)) = R'(v(t), \frac{d}{dt} v(t), u(t)) + R(v(t), \frac{d}{dt} u(t))$$

und die Voraussetzungen über R benutzt.

Der Fixpunkt von F_1 ist dann die behauptete Lösung von (1.16) in $C_1([0,T],E)$.

In der Monographie von Friedman [14] findet man eine Lösungsmethode nichtlinearer Evolutionsgleichungen, die der hier dargestellten am nächsten kommt; allerdings wird dort auf die lokale Hölderstetigkeit der Nichtlinearität nicht verzichtet (s. (1.17)).

Eine gute Übersicht über Methoden, abstrakte Evolutionsgleichungen in Banachräumen zu lösen, und eine umfangreiche Bibliographie bietet das Buch von Carroll [9]. Im nichtlinearen Fall überwiegen die Monotonie- und Kompaktheitsargumente, wie auch in den beiden Arbeiten von Browder ([6], [7]). Diese Bedingungen werden abgeschwächt in den Arbeiten von Bardos, Brézis und Ton (s. [4], [47], [48]), die stellvertretend für viele Arbeiten in dieser Richtung zitiert werden: Ausgehend von einer "Konstellation" $V \subset H \subset V'$ wirkt der Operator A von V in V' und ist beschränkt, koerziv und hemistetig. Diese Methoden findet man auch in dem Buch von Lions [30] wieder.

Die Theorie nichtlinearer Halbgruppen mit maximal-monotonen Erzeugern ist in dem Artikel von Pazy [40] dargestellt. Diese Methode leidet aber am Mangel konkreter Anwendungen. Eine Abschwächung der Monotonie durch die Existenz einer "einseitigen Ableitung der Norm" eines Operators findet man in den Arbeiten von Martin ([34], [35]); ein Anwendungsbeispiel wird allerdings nicht gegeben.

Lineare Evolutionsgleichungen werden beispielsweise von Lagnese [29] behandelt; ist der lineare Operator ein "gestörter Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe", so stammen die ersten Ergebnisse bereits von Phillips [42]. Ist der Störoperator nicht linear, so haben Kato und Fujita seine Iterationsmethode in ihren Arbeiten [21], [26] wieder aufgegriffen. Und hier schließt sich auch die vorliegende Arbeit an.

Kapitel 2

Stabilitätssätze für fastlineare Evolutionsgleichungen im Hilbertraum und globale Existenz.

§ 1: Hilfssätze über gestörte selbstadjungierte Operatoren im Hilbertraum

Wie in Kapitel 1 ist E wieder ein reeller Hilbertraum. Der Operator A ist in diesem Kapitel ein positiv definiter selbstadjungierter Operator in E und A^{-1} ist kompakt. Es sei hier bemerkt, daß das ein Spezialfall unter den im Kapitel 1 zugelassenen Operatoren ist und damit alle Sätze aus Kapitel 1 auch für positiv definite selbstadjungierte Operatoren A gelten.

Weiter sei M ein linearer Operator in E mit folgenden Eigenschaften:

$$(2.1) \qquad \begin{aligned} &D(M) \supset D(A^{\frac{1}{2}}) \\ &\|M\,u\| \le \gamma_4 \, \|A^{\frac{1}{2}}\, u\| \qquad \text{für alle } u \in D(A^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

Dieses Kapitel stellt eine Verallgemeinerung der Stabilitätssätze in [27] dar, wo die hier bewiesenen Sätze speziell für die Navier-Stokesschen Gleichungen hergeleitet wurden.

Im ersten Paragraphen soll der gestörte Operator $\tilde{A} = A + M$ untersucht werden; insbesondere sein Spektrum. Das erste diesbezügliche Lemma stammt von Prodi (s. [43]).

<u>Lemma 2.1</u> a) $\tilde{A} = A + M$ mit $D(\tilde{A}) = D(A)$ ist ein abgeschlossener Operator in E.

b) Für $\mu \in \mathbb{C}$ mit $-\mathrm{re}\,\mu + \frac{1}{4\gamma_4^2}(\mathrm{im}\,\mu)^2 - \gamma_4^2 > 0$ gilt:

$$\mu \in P(\tilde{A}) \text{ und } \|(\tilde{A} - \mu I)^{-1}\| \leq \frac{1}{\gamma_4(-\mathrm{re}\,\mu + \frac{1}{4\gamma_4^2}(\mathrm{im}\,\mu)^2 - \gamma_4^2)^{\frac{1}{2}}}$$

($P(\tilde{A})$ = Resolventenmenge von $\tilde{A}$)

c) Für $\mu \in \mathbb{C}$ mit $-\mathrm{re}\,\mu + \frac{1}{2}(\gamma_5^2 - \gamma_4^2) > 0$ gilt:

$$\mu \in P(\tilde{A}) \text{ und } \|(\tilde{A} - \mu I)^{-1}\| \leq \frac{1}{-\mathrm{re}\,\mu + \frac{1}{2}(\gamma_5^2 - \gamma_4^2)}$$

Dabei ist γ_5 bestimmt durch die Abschätzung

$$\gamma_5 \|u\| \leq \|A^{\frac{1}{2}} u\|$$

<u>Beweis:</u> Man geht aus von der Gleichung

$$A u + M u - \mu u = g \qquad , u \in D(A)$$

und erhält nach skalarer Multiplikation mit u:

$$\|A^{\frac{1}{2}} u\|^2 - \gamma_4 \|A^{\frac{1}{2}} u\| \, \|u\| - \mathrm{re}\,\mu \|u\|^2 \leq \|g\| \, \|u\|$$

(2.2) $$(\tfrac{1}{2}(\gamma_5^2 - \gamma_4^2) - \mathrm{re}\,\mu)\|u\|^2 \leq \frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}} u\|^2 - (\tfrac{1}{2}\gamma_4^2 + \mathrm{re}\,\mu)\|u\|^2 \leq \|g\| \, \|u\|$$

was Behauptung c) beweist.

Andererseits hat man:

$$|\mathrm{im}\,\mu| \, \|u\| \leq \|g\| + \gamma_4 \|A^{\frac{1}{2}} u\|$$

$$\frac{(\mathrm{im}\,\mu)^2 \|u\|^2}{4\gamma_4^2} \leq \frac{\|g\|^2}{2\gamma_4^2} + \frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}} u\|^2$$

und aus (2.2) folgt:

$$\frac{1}{2}\,\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 - \mathrm{re}\,\mu\,\|u\|^2 \le \gamma_4^2\,\|u\|^2 + \frac{\|g\|^2}{2\gamma_4^2}$$

Addition der letzten beiden Ungleichungen ergibt:

$$(-\mathrm{re}\,\mu + \frac{1}{4\gamma_4^2}\,(\mathrm{im}\,\mu)^2 - \gamma_4^2)\,\|u\|^2 \le \frac{1}{\gamma_4^2}\,\|g\|^2$$

was b) impliziert.

Um a) zu beweisen gehe man aus von einer Folge $\{u_n\} \subset D(A)$ dergestalt, daß $u_n \to u$ und $\tilde{A}\,u_n \to v$ in E gilt.

(2.2) mit $\mu = o$ beweist, daß $A^{\frac{1}{2}}\,u_n$, und somit auch $M\,u_n$, in E konvergiert: $M\,u_n \to w$. Damit konvergiert $A\,u_n$ gegen $v - w$, woraus $u \in D(A)$ und $\tilde{A}\,u = v$ folgt.

Aussage b) von Lemma 2.1 besagt, daß das Spektrum von $\tilde{A}$ innerhalb der Parabel $\mathrm{re}\,\mu = \frac{1}{4\gamma_4^2}\,(\mathrm{im}\,\mu)^2 - \gamma_4^2$ liegt.

<u>Korollar 2.2</u> Das Spektrum von $\tilde{A}$ besteht nur aus Eigenwerten endlicher Vielfachheit mit ∞ als einzig möglichem Häufungspunkt.

<u>Beweis:</u> Wegen (2.2) bildet die Resolvente beschränkte Mengen in E in beschränkte Mengen in $D(A^{\frac{1}{2}})$ ab, die wegen der Kompaktheit von $A^{-\frac{1}{2}}$ relativ kompakt in E sind. Nach dem Satz von der kompakten Resolventen (s. [25] p.187) folgt dann die Behauptung.

Lemma 2.3 Es gelte re $\mu \geq a > o$ für alle $\mu \in \sigma(\tilde{A})$ ($\sigma(\tilde{A})$ = Spektrum von $\tilde{A}$). Dann erzeugt $-\tilde{A}$ eine holomorphe Halbgruppe $e^{-\tilde{A}t}$ in E mit folgenden Abschätzungen:

a) $\quad \|e^{-\tilde{A}t}\, u\| \leq \gamma_1\, e^{-\delta t}\, \|u\|$, $\quad \delta > o,\ t \geq o$

b) $\quad \|\tilde{A}\, e^{-\tilde{A}t}\, u\| \leq \gamma_2\, e^{-\delta t}\, t^{-1} \|u\|$, $\quad t > o$

Beweis: Nach [14], p. 105, genügt es die Abschätzung

$$(2.3) \qquad \|(\tilde{A} - \mu I)^{-1}\| \leq \frac{c}{|\mu| + 1}\, , \qquad \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \arg \mu < \frac{3}{2}\pi + \varepsilon$$

für positive Konstanten c und ε zu beweisen.

1) Für die Menge $|\mu| \geq C_1$, re $\mu \leq o$, $|\mathrm{im}\, \mu| \geq 2\gamma_4\, |\mathrm{re}\, \mu|$

mit $C_1 = 2(1 + \gamma_4^2\, (1 + 4\gamma_4^2))^{\frac{1}{2}}$ gilt:

$$-\mathrm{re}\, \mu + \frac{1}{4\gamma_4^2}\, (\mathrm{im}\, \mu)^2 - \gamma_4^2 \geq \frac{(1+|\mu|)^2}{4(1+4\gamma_4^2)} \quad ,$$

woraus wegen b) von Lemma 2.1 folgt:

$$(2.4) \qquad \|(\tilde{A} - \mu I)^{-1}\| \leq \frac{2(1+4\gamma_4^2)^{\frac{1}{2}}}{\gamma_4(1+|\mu|)} = \frac{c_1}{|\mu|+1}$$

2) Für die Menge $|\mu| \geq C_2$, re $\mu \leq o$, $|\mathrm{im}\, \mu| \leq 2\gamma_4 |\mathrm{re}\, \mu|$

mit $C_2 = 1 + \gamma_4^2\, (1 + 4\gamma_4^2)^{\frac{1}{2}}$ gilt:

$$-\mathrm{re}\, \mu - \frac{\gamma_4^2}{2} \geq \frac{|\mu|+1}{2(1 + 4\gamma_4^2)^{\frac{1}{2}}} \quad ,$$

woraus wegen c) von Lemma 2.1 folgt:

$$\|(\tilde{A} - \mu I)^{-1}\| \leq \frac{2(1+4\gamma_4^2)^{\frac{1}{2}}}{|\mu| + 1} = \frac{c_2}{|\mu|+1}$$

3) Für die Menge $|\mu| \geq C_3$, re $\mu \geq o$, $|\text{im}\ \mu| \geq 2\gamma_4$ re μ

mit $C_1 = 18\gamma_4^2 + 3$ gilt:

$$-\text{re}\ \mu + \frac{1}{4\gamma_4^2} (\text{im}\ \mu)^2 - \gamma_4^2 > \frac{(1+|\mu|)^2}{4(1+4\gamma_4^2)}$$

woraus (2.4) folgt.

4) $C = \max(C_1, C_2, C_3)$. Nach Voraussetzung gehört die kompakte Menge

$S = \{\mu \mid \mu \in \mathbb{C},\ |\mu| \leq C,\ \text{re}\ \mu < \frac{1}{2} a\}$ zu $P(\tilde{A})$, so daß

$$\|(\tilde{A} - \mu I)^{-1}\| \leq \frac{c_3}{|\mu|+1} \qquad \text{für } \mu \in S \text{ gilt.}$$

Definiert man ε durch $\sin \varepsilon = \frac{a}{2C}$, $o < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, und $c = \max(c_1, c_2, c_3)$ erhält man damit (2.3).

Unter der Voraussetzung von Lemma 2.3 können nun wie in Kapitel 1 gebrochene Potenzen von $\tilde{A}$ definiert werden (s. (1.2), (1.3) und (1.4)). Es sei hier noch die sogenannte Interpolationsungleichung erwähnt (s. [14], p. 159):

$$(2.5) \quad \|\tilde{A}^{\alpha} u\| \leq \gamma_6 \|u\|^{1-\alpha} \|\tilde{A} u\|^{\alpha}, \quad u \in D(\tilde{A}), \quad o \leq \alpha \leq 1.$$

Falls re $\sigma(\tilde{A}) \geq a > o$ gilt, erfüllt der gestörte Operator A also alle Voraussetzungen von Kapitel 1.

Lemma 2.4 Es gelte re $\mu \geq a > o$ für alle $\mu \in \sigma(\tilde{A})$. Dann ist $A^{\beta}\tilde{A}^{-\alpha}$ ein beschränkter linearer Operator in E für $o \leq \beta < \alpha < 1$, $\alpha = \beta = 1$.

Beweis: 1) $a = \beta = 1$.

$\tilde{A} = (I + MA^{-1})A$. Wegen (2.1) ist MA^{-1} ein kompakter Operator in E und da $u + MA^{-1}u = o$ nach der Voraussetzung über das Spektrum von $\tilde{A}$ nur die Lösung $u = o$ besitzt, ist $(I + MA^{-1})^{-1} = A\tilde{A}^{-1}$ ein beschränkter Operator in E.

2) $o \leq \beta < \alpha < 1$.

Wegen Lemma 2.3 b) gilt:

$$||A\, e^{-\tilde{A}t}\, u|| = ||A\,\tilde{A}^{-1}\,\tilde{A}\, e^{-\tilde{A}t}\, u|| \leq c_1\, e^{-\delta t}\, t^{-1}\, ||u||, \quad t > o.$$

Die Ungleichung $||A^{\beta}u|| \leq c_2\, ||u||^{1-\beta}\, ||A\,u||^{\beta}$ für $u \in D(A)$ ergibt zusammen mit Lemma 2.3 a):

$$(2.6)\qquad ||A^{\beta}\, e^{-\tilde{A}t}\, u|| \leq c_3\, e^{-\delta t}\, t^{-\beta}\, ||u||, \quad t > o.$$

Die Spektraldarstellung von A^{β} sieht wegen der kompakten Resolventen A^{-1} folgendermaßen aus:

$$A^{\beta}u = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu}^{\beta}\,(u,\phi_{\nu})\phi_{\nu} \qquad A\phi_{\nu} = \lambda_{\nu}\phi_{\nu}\,,\ (\phi_{\nu},\phi_{\mu}) = \delta_{\nu\mu}$$

mit $D(A^{\beta}) = \{u \mid \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu}^{2\beta}\,(u,\phi_{\nu})^2 < \infty\}$.

Damit läßt sich (2.6) schreiben als:

$$(2.7)\quad ||A^{\beta}\, e^{-\tilde{A}t}\, u|| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_{\nu}^{2\beta}\,(e^{-\tilde{A}t}\,u,\phi_{\nu})^2 \leq c_3^2\, e^{-2\delta t}\, t^{-2\beta}\, ||u||^2, \quad t > o.$$

Weiter wird die folgende Abschätzung benötigt:

$$(2.8)\qquad \Big(\int_o^{\infty} \lambda_{\nu}^{\beta}(e^{-\tilde{A}t}\,u,\phi_{\nu})\, t^{\alpha-1}\, dt\Big)^2$$

$$(2.8) \leq \int_o^\infty \lambda_\nu^{2\beta}(e^{-At},\phi_\nu)^2\, e^{2bt}\, t^{2(\alpha-c)}\, dt \int_o^\infty e^{-2bt}\, t^{-2(1-c)}\, dt$$

mit $o < b < \delta$, $c = \frac{1+(\alpha-\beta)}{2}$.

Mit $C = \int_o^\infty e^{-2bt}\, t^{-2(1-c)}\, dt$ und (2.7) und (2.8) folgt dann:

$$\sum_{\nu=1}^\infty \lambda_\nu^{2\beta}\, (\tilde{A}^{-\alpha}u,\phi_\nu)^2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)^2} \sum_{\nu=1}^\infty \left(\int_o^\infty \lambda_\nu^\beta\, (e^{-\tilde{A}t}\, u,\phi_\nu)\, t^{\alpha-1}\, dt\right)^2$$

$$\leq \frac{C}{\Gamma(\alpha)^2} \sum_{\nu=1}^\infty \int_o^\infty \lambda_\nu^{2\beta}\, (e^{-\tilde{A}t}\, u,\phi_\nu)^2\, e^{2bt}\, t^{2(\alpha-c)}\, dt$$

$$\leq \frac{c_3^2\, C}{\Gamma(\alpha)^2} \int_o^\infty e^{-2(\delta-b)t}\, t^{(\alpha-\beta)-1}\, dt\, \|u\|^2$$

$$\leq c_4^2\, \|u\|^2 .$$

Damit ist $\tilde{A}^{-\alpha}u \in D(A^\beta)$ für alle $u \in E$ und $\|A^\beta \tilde{A}^{-\alpha} u\| \leq c_4 \|u\|$

§ 2 Hinreichende Bedingung für die Stabilität bei fastlinearen Evolutionsgleichungen im Hilbertraum.

In endlichdimensionalen Hilberträumen gilt folgender Satz von Lyapunov:
Die Lösung $u = o$ von

$$\frac{d}{dt}\, u = -A\, u + F(u),$$

mit linearem A, stetigem F und $\|F(u)\| = o(\|u\|)$ (für $u \to o$) ist asymptotisch stabil, falls A nur Eigenwerte mit positivem Realteil besitzt. Hat A umgekehrt einen Eigenwert mit negativem Realteil, ist die stationäre Lösung $u = o$ nicht stabil.

Dieser Satz soll in diesem und dem nächsten Paragraphen für unendlich-dimensionale Hilberträume verallgemeinert werden, und zwar für Gleichungen vom Typ

$$\frac{d}{dt} u(t) = -\tilde{A}\, u(t) + F(u(t)) \qquad , \tilde{A} = A + M$$

oder

$$(2.9) \qquad \frac{d}{dt} A^{-\beta} u(t) = -A^{1-\beta} u(t) - M A^{-\beta} u(t) + R(u(t)), \quad o \le \beta < 1$$

mit $R = F \circ A^{-\beta}$. Genügt der lineare Operator M einer Abschätzung

$$(2.10) \qquad \|M u\| \le \gamma_7 \; \|A^{\bar{\beta}} u\| \qquad , u \in D(A^{\bar{\beta}}) \quad , o \le \bar{\beta} < 1,$$

und gilt:

$$(2.11) \qquad \begin{cases} M u \in D(A^{\varepsilon}) \quad \text{für } u \in D(A^{\beta}), \quad \bar{\beta} < \beta < 1, \\ A^{\varepsilon} \circ M : D(A^{\beta}) \to E \quad \text{ist stetig,} \end{cases}$$

dann genügt $\tilde{R} = M A^{-\beta} + R$, $\bar{\beta} < \beta < 1$, allen Voraussetzungen (1.9), (1.12), (1.17), (1.19) aus den §§ 2 und 3 von Kapitel 1, falls nur R diesen Voraussetzungen genügt. Damit finden alle Existenzsätze aus diesen Paragraphen Anwendung auf die Gleichung (2.9).

(Im nächsten Kapitel wird gezeigt werden, daß die Bedingungen (2.10) und (2.11) für eine große Klasse von Differentialoperatoren M und A erfüllt werden.)

Im folgenden gelte $R(o) = o$

<u>Definition 2.5</u> Die Lösung $u = o$ von (2.9) heißt <u>stabil</u>, falls zu jedem $\varepsilon > o$ ein $\delta(\varepsilon) > o$ existiert, so daß für jede strikte Lösung u von (2.9) mit $\|u(o)\| \le \delta$ in ihrem maximalen Existenzintervall $\|u(t)\| \le \varepsilon$ gilt.

Bemerkung: Wegen der Sätze 1.14 und 1.7 ist das maximale Existenzintervall in diesem Fall $[o,\infty)$.

Die Lösung u = o von (2.9) heißt <u>asymptotisch stabil</u>, falls u = o stabil ist und $\lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = o$ gilt.

Die Bedingung $\|R(u)\| = o(\|u\|)$ ist im folgenden enthalten:

$$(2.12) \qquad \begin{cases} R:E \to E \text{ ist stetig, } \|R(u)\| \le \omega(\|u\|) \text{ mit} \\ \omega \in C_1(\mathbb{R}_+), \quad \omega(o) = o, \quad \omega'(o) = o, \quad \omega' \text{ monoton wachsend.} \end{cases}$$

Dann gilt folgender Stabiltitätssatz:

<u>Satz 2.6</u> M erfülle (2.10) mit $\bar{\beta} \le \frac{1}{2}$, R genüge (2.12) und für jeden Punkt μ aus dem Spektrum von $\tilde{A} = A + M$ gelte: re $\mu \ge a > o$. Dann ist die Lösung u = o von (2.9) (mit $\bar{\beta} < \beta < 1$) asymptotisch stabil.

<u>Beweis:</u> Sei u eine strikte Lösung von (2.9) in (O,T). Gemäß Satz 1.14 genügt u der Integralgleichung

$$u(t) = e^{-At} u(o) + \int_o^t A^{\beta} e^{-A(t-s)} (-M A^{-\beta} u(s) + R(u(s)))ds$$

in $[O,T)$.

Die Funktion $v = A^{-\beta} u$ löst die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} v(t) = -\tilde{A} v(t) + R(u(t)), \qquad t \in (O,T)$$

und da aufgrund der Voraussetzung $-\tilde{A}$ eine holomorphe Halbgruppe erzeugt (s. Lemma 2.3) gilt wiederum wegen Satz 1.14:

$$v(t) = e^{-\tilde{A}t} v(o) + \int_o^t e^{-\tilde{A}(t-s)} R(u(s))ds, \qquad t \in (O,T) .$$

Wegen der Abschätzung (2.6) ist $\int_0^t e^{-\tilde{A}(t-s)} R(u(s))ds \in D(A^\beta)$ und für

$u = A^\beta v(t)$ erhält man schließlich die zweite Darstellung:

$$u(t) = A^\beta e^{-\tilde{A}t} A^{-\beta} u(o) + \int_0^t A^\beta e^{-\tilde{A}(t-s)} R(u(s))ds .$$

Für $w(t) = e^{bt} u(t)$, $o < b < \delta$, hat man dann:

$$\text{a) } w(t) = e^{bt} e^{-At}u(o) + \int_0^t e^{bt} A^\beta e^{-A(t-s)}(-MA^{-\beta}e^{-bs}w(s)+R(e^{-bs}w(s)))ds$$

(2.13)

$$\text{b) } w(t) = e^{bt} A^\beta e^{-\tilde{A}t}A^{-\beta} u(o) + \int_0^t e^{bt}A^\beta e^{-\tilde{A}(t-s)}R(e^{-bs}w(s))ds$$

bzw. (s. (2.6)):

$$\text{a) } \|w(t)\| \leq e^{-(\delta-b)t} \|u(o)\| + c_1 \int_0^t e^{-(\delta-b)(t-s)}(t-s)^{-\beta}(\|w(s)\|$$

$$+ \omega'(\|w(s)\|) \|w(s)\|)ds \quad \text{für } t \in [0,T)$$

(2.14)

$$\text{b) } \|w(t)\| \leq c_2 e^{-(\delta-b)t} t^{-\beta} \|u(o)\|$$

$$+ c_3 \int_0^t e^{-(\delta-b)(t-s)} (t-s)^{-\beta} \omega'(\|w(s)\|) \|w(s)\| ds \quad \text{für } t \in (0,T).$$

Wegen (2.14) a) existieren Konstanten $\tau_o > o$, $\varepsilon_o > o$, so daß für jedes ε mit $o < \varepsilon \leq \varepsilon_o$ ein $\delta(\varepsilon)$ existiert, so daß gilt:

$$\|w(t)\| \leq \varepsilon , \; t \in [0,\tau_o], \quad \text{falls nur } \|u(o)\| \leq \delta \text{ ist.}$$

Für $t \geq \tau_o$ folgt mit (2.14) b):

$$\|w(t)\| \leq c_4 \|u(o)\| + c_3 \int_0^t e^{-(\delta-b)(t-s)} (t-s)^{-\beta}\omega'(\|w(s)\|) \|w(s)\| ds$$

Es gibt nun aufgrund der Voraussetzung über ω ein ε_1 derart, daß

$$c_4 \|u(o)\| + c_3 \int_o^\infty e^{-(\delta-b)s} s^{-\beta} ds \quad \omega'(\varepsilon')\varepsilon' < \varepsilon'$$

für alle ε' mit $o < \varepsilon' \leq \varepsilon_1$ gilt, sofern nur $\|u(o)\| \leq \delta'(\varepsilon')$ ist. Sei endlich $\varepsilon = \min(\varepsilon_o, \varepsilon', \delta')$. Dann ist die Menge

$$J = \{t \mid t \in [0,T), \|w(s)\| \leq \varepsilon \text{ für } s \in [0,t]\}$$

abgeschlossen und offen in $[0,T)$, also $J = [0,T)$.
Mit $T = T_{max}$ folgt nach Satz 1.7, daß u auf $[o,\infty)$ existiert und

$$(2.15) \qquad \|u(t)\| \leq \varepsilon \quad e^{-bt} \qquad ,t \in [o,\infty), \text{ falls } \|u(o)\| \leq \delta(\varepsilon).$$

Satz 2.6 ist die unendlich-dimensionale Verallgemeinerung des Stabilitätssatzes von Lyapunov.
Die Umkehrung ist im endlich-dimensionalen Fall ebenfalls richtig. Sie lautet:
Existiert ein Spektralpunkt (= Eigenwert) von $\tilde{A}$ mit negativem Realteil, so ist u = o instabil. Was heißt das ? Es gibt eine Umgebung U von o, so daß in jeder Umgebung V um o eine Anfangsbedingung u_o und eine Lösung u mit dieser Anfangsbedingung existiert, derart daß $u(t) \notin U$ für mindestens ein t aus dem maximalen Existenzintervall dieser Lösung ist. Während also Stabilitätsaussagen unabhängig von der Existenzfrage sind, muß bei einer Instabilitätsaussage gleichzeitig die Existenz einer Lösung gesichert sein. Das zeigt, daß alle Stabilitäts- und Instabilitätsaussagen von dem gewählten Lösungs- und auch von dem Umgebungsbegriff, d.h. von der Topologie, abhängen.

Die Topologie, die bei Satz 2.6 zugrunde liegt, ist die starke Topologie des Hilbertraums E. Es sei aber bemerkt, daß der Begriff der strikten

Lösung von dem β in der Gleichung (2.4) abhängt. Bei den Anwendungen wird man normalerweise $A^{-\beta}u = v$ setzen, so daß die Abschätzung (2.15) für die Lösung v von

$$\frac{d}{dt} v(t) = -\tilde{A}\, v(t) + F(v(t))$$

(mit $F = R \circ A^{\beta}$) lautet:

$$\|A^{\beta} v(t)\| \leq \varepsilon \quad e^{-bt} \;, \quad t \in [o,\infty), \text{ falls } \|A^{\beta} v(o)\| \leq \delta(\varepsilon) \;.$$

Insofern ist der Satz 2.6 eigentlich ein Stabilitätssatz in $D(A^{\beta})$.

§ 3 Notwendige Bedingung für die Stabilität bei fastlinearen Evolutionsgleichungen im Hilbertraum.

Unter der Einschränkung, daß keine rein imaginären Eigenwerte von $\tilde{A}$ existieren, ist die Positivität der Realteile der Spektralpunkte von A wie im endlichdimensionalen Fall auch notwendig für die Stabilität von $u = o$.

Satz 2.7 M genüge (2.10) mit $\bar{\beta} \leq \frac{1}{2}$ und die Differentialgleichung (2.9) besitze für jedes $u_o \in E$ lokal eine strikte Lösung mit $u(o) = u_o$. $\tilde{A} = A + M$ habe keine Spektralpunkte mit verschwindendem Realteil und zu jedem $\varepsilon > o$ existiere ein $\delta(\varepsilon)$, so daß für jede strikte Lösung von (2.9) (mit $\bar{\beta} < \beta < 1$) gilt:

(2.16) $\|A^{-\beta} u(t)\| < \varepsilon$ für $t \in [0,T_{max})$, sofern $\|A^{-\beta} u(o)\| \leq \delta(\varepsilon)$.

Dann folgt re $\mu > o$ für jeden Punkt μ aus dem Spektrum von $\tilde{A}$.

(Bemerkung: (2.16) impliziert <u>nicht</u>, daß $T_{max} = \infty$ ist.)

<u>Beweis:</u> Der Beweis wird indirekt geführt. Angenommen, das Spektrum $\sigma(\tilde{A})$ enthalte Spektralpunkte mit negativem Realteil. Wegen Lemma 2.1 und Korollar 2.2 gibt es nur endlich viele solcher Punkte, die alle Eigenwerte endlicher Vielfachheit sind. P bzw. Q = I-P seien die Eigenprojektoren zum negativen ($\sigma_-(\tilde{A})$) bzw. positiven ($\sigma_+(\tilde{A})$) Teil des Spektrums von $\tilde{A}$ und $\tilde{A}_1$ bzw. $\tilde{A}_2$ die "Teile" von A entsprechend der Zerlegung $E = P\,E \oplus Q\,E$. Dann ist $\sigma(\tilde{A}_1) = \sigma_-(\tilde{A})$ und $\sigma(\tilde{A}_2) = \sigma_+(\tilde{A})$ (s. dazu Th. 6.17 in [25],p. 178).

Da PE endlichdimensional ist, ist $\tilde{A}_1$ beschränkt. Da sich (wiederum wegen Lemma 2.1 und Korollar 2.2) die Eigenwerte in $\sigma(\tilde{A}_2)$ nicht gegen die imaginäre Achse häufen können, gilt re $\sigma(\tilde{A}_2) \geq a > o$. Deswegen erzeugt $-\tilde{A}_2$ in QE eine holomorphe Halbgruppe mit Eigenschaften wie sie in Lemma 2.3 aufgeführt sind. ($\tilde{A}_2$ ist dicht definiert in QE). Darum kann $\tilde{A}_2^{\alpha}$ mit den Eigenschaften (1.4) definiert werden und schließlich gilt nach Lemma 2.4, daß mit $o \leq \beta < \alpha < 1$ $A^{\beta}\,\tilde{A}_2^{-\alpha}$ ein beschränkter Operator von QE nach E ist.

Es sei nun $u_o \in E$ mit $Q\,A^{-\beta}\,u_o = o$ und u eine strikte Lösung von (2.9) in $[0,T_{max})$ mit $u(o) = u_o$.

Mit $v = A^{-\beta}\,u$ folgt:

$$\frac{d}{dt}\,P\,v(t) = -\tilde{A}_1\,P\,v(t) + P\,R\,(u(t))\,, \qquad P\,v(o) = A^{-\beta}\,u_o$$

(2.17)

$$\frac{d}{dt}\,Q\,v(t) = -\tilde{A}_2\,Q\,v(t) + Q\,R\,(u(t)), \qquad Q\,v(o) = o$$

und mit Satz 1.14

$$Q\,v(t) = \int_o^t e^{-\tilde{A}_2(t-s)}\,Q\,R\,(u(s))ds \quad .$$

Wegen der Beschränktheit von $QR(u)$ auf $[0,T_{max})$ folgt wie üblich:

$$Q\,v(t) \in D(\tilde{A}_2^{\alpha}), \quad o \le \alpha < 1,$$

$$\tilde{A}_2^{\alpha}\, Q\, v(t) = \int_o^t \tilde{A}_2^{\alpha}\, e^{-\tilde{A}_2(t-s)}\, Q\, R\,(u(s))ds, \quad t \in [0,T_{max}),$$

und $\tilde{A}_2^{\alpha}\, Q\, v$ ist stetig auf $[0,T_{max})$.

Man setzt $w = \tilde{A}_2^{\alpha}\, Q\, v$ und erhält für $\beta < \alpha < 1$ die Abschätzungen:

$$\|w(t)\| \le c_1 \int_o^t e^{-\delta(t-s)}(t-s)^{-\alpha}\, \|R(A^{\beta}Pv(s) + A^{\beta}\,\tilde{A}_2^{-\alpha}\, w(s)\|\, ds$$

$$\le c_1 \int_o^t e^{-\delta(t-s)}(t-s)^{-\alpha}\quad \omega(c_2\,\|Pv(s)\| + c_3\,\|w(s)\|\,)ds,$$

da in PE A^{β} beschränkt ist.

Wegen der Konvexität von ω bekommt man schließlich:

$$\|w(t)\| \le F(t) + \frac{1}{2}\, c_1 \int_o^t e^{-\delta(t-s)}(t-s)^{-\alpha}\quad \omega(2c_3\,\|w(s)\|\,)ds$$

(2.18)

$$F(t) = \frac{1}{2}\, c_1 \int_o^t e^{-\delta(t-s)}(t-s)^{-\alpha}\quad \omega(2c_2\,\|Pv(s)\|\,)ds\;.$$

Aufgrund der Voraussetzung (2.16) ist

(2.19) $\quad \|Pv(t)\| \le \varepsilon\;,\; t \in [0,T_{max})$, sofern nur $\|v(o)\| \le \delta(\varepsilon)$.

Über ε wird im weiteren Verlauf des Beweises noch verfügt werden.
Eine Zwischenbehauptung ist: Es gibt ein $\varepsilon_o > o$, so daß

(2.20) $\qquad \|w(t)\| \le 2F(t) \qquad ,t \in [0,T_{max})$,

falls nur $\varepsilon \le \varepsilon_o$ ist.

Zum Beweis wird $J = \{t \mid t \in [0,T_{max}),\ \|w(s)\| \leq 2F(t)$ für $s \in [0,t]\}$

gesetzt. J ist abgeschlossen, da w stetig ist.

Sei nun $t \in J$. Dann gelten wegen (2.18) und (2.19) die Abschätzungen:

$$\|w(t)\| \leq F(t) + 2\, c_1 c_3 c_4\ \ \omega'(4c_3\, F(t))F(t), \quad c_4 = \int\limits_o^\infty e^{-\delta s}\ s^{-\alpha}\ ds$$

$$F(t) \leq \frac{1}{2}\, c_1 c_4\ \ \omega(2c_2\varepsilon) \qquad \text{(Monotonie von } \omega\text{), so daß}$$

$$\|w(t)\| < 2F(t) \qquad \text{für } o < \varepsilon \leq \varepsilon_o \text{ ist.}$$

Deshalb ist J auch offen in $[0,T_{max})$ und somit $J = [0,T_{max})$.

(2.20) impliziert die Beschränktheit von $A^\beta\, Q\, v = A^\beta\, \tilde{A}_2^{-\alpha} w$, und damit die Beschränktheit von u auf $[0,T_{max})$, so daß wegen Satz 1.7 $T_{max} = \infty$ folgt.

Für $\tilde{A}_1$ in PE gilt: $\operatorname{re} \sigma(\tilde{A}_1) \leq -q < o$.

Im endlichdimensionalen Raum PE kann man dann eine Basis $\{\phi_1,\ldots,\phi_m\}$ derart wählen, daß

$$(\tilde{A}_1\ Pv,\ Pv)' \leq -\frac{3}{4}\, q\ |Pv|^2$$

ist, wobei das Skalarprodukt in PE durch

$$(Pv_1,\ Pv_2)' = \sum_{\nu=1}^m x_\nu^1\ x_\nu^2 \quad , \quad Pv_j = \sum_{\nu=1}^m x_\nu^j\ \phi_\nu,\ j = 1,2$$

und die Norm in PE durch

$$|Pv|^2 = (Pv,\ Pv)'$$

definiert ist. Damit folgt aus (2.17), (2.19) und (2.20) (und der Monotonie von ω'):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\;|Pv(t)|^2 \geq \frac{3}{4}\,q\;|Pv(t)|^2 - |P\;R(A^{\beta}\;Pv(t) + A^{\beta}\;\tilde{A}_2^{-\alpha}\;w(t))|\;|Pv(t)|$$

$$\geq \frac{3}{4}\,q\;|Pv(t)|^2 - c_5\;\omega'(c_6\varepsilon)\,|Pv(t)|^2 - c_7\omega(c_8F(t))\,|Pv(t)|$$

$$\geq \frac{1}{2}\,q\;|Pv(t)|^2 - c_7\;\omega(c_8F(t))\,|Pv(t)|$$

für $o < \varepsilon \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_o$ $(c_5\;\omega'(c_6\varepsilon_1) \leq \frac{1}{4}\,q)$.

Da $F(o) = o$ und $\omega(o) = o$ ist, wächst also $|Pv(t)|^2$ monoton auf einem Intervall $[0,\tau)$. Für $t \in [0,\tau)$ gilt dann wegen der Monotonie von ω und ω':

$$F(t) \leq \frac{1}{2}\,c_1c_4\;\;\omega(c_9|Pv(t)|)$$

$$\leq \frac{1}{2}\,c_1c_4\;\;\omega'(c_{10}\varepsilon)\,|Pv(t)|,$$

so daß man auf $[0,\tau)$ erhält:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\;|Pv(t)|^2 \geq \{\frac{1}{2}\,q - c_{11}\;\;\omega'(c_{12}\omega(2c_2\varepsilon))\;\omega'(c_{1o}\varepsilon)\}\;|Pv(t)|^2\;.$$

Für $o < \varepsilon \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_o$ $(c_{11}\omega'(c_{12}\omega(2c_2\varepsilon_2))\;\omega'(c_{1o}\varepsilon_2) < \frac{1}{2}\,q)$

folgt damit $\tau = \infty$ und $|Pv(t)|$ wächst auf $[o,\infty)$ exponentiell an. Das widerspricht aber (2.19).

Satz 2.7 soll noch etwas interpretiert werden: Setzt man $A^{-\beta}\;u = v$, wobei u strikte Lösung von (2.9) ist, so ist v strikte Lösung von

$$\frac{d}{dt}\,v(t) = -\tilde{A}\;v(t) + F(v(t)) \tag{2.21}$$

mit $F = R \circ A^{\beta}$. Besitzt nun $\tilde{A} = A + M$ keinen Spektralpunkt mit verschwindendem Realteil, aber einem negativen Realteil, dann gibt es ein $\varepsilon_o > o$, derart, daß in jeder Umgebung von $v = o$ (in der Topologie von E) ein $v_o \in D(A^{\beta})$ und eine strikte Lösung v von (2.21) in $(0,T_{max})$ mit der Anfangsbedingung v_o existiert, so daß $\|v(t_o)\| > \varepsilon_o$ für mindestens ein $t_o \in (0,T_{max})$ ist. Insofern ist der Satz 2.7 ein Instabilitätssatz in E.

§ 4 Hinreichende Bedingungen für globale Existenz von Lösungen fastlinearer Evolutionsgleichungen im Hilbertraum.

Ist die lokale Existenz von strikten Lösungen von

$$(2.9) \quad \frac{d}{dt} A^{-\beta} u(t) = -\tilde{A} A^{-\beta} u(t) + R(u(t)), \qquad \tilde{A} = A + M,$$

gesichert, impliziert der Stabilitätssatz 2.6 wegen der a priori-Abschätzung die globale Existenz - d.h. Existenz auf $[o,\infty)$ - von strikten Lösungen von (2.9), falls nur die Anfangsbedingung u_o hinreichend klein ist.

Dies Ergebnis soll durch folgenden Satz erweitert werden.

Satz 2.8 M genüge (2.10) mit $\bar{\beta} \le \frac{1}{2}$ und es sei re $\sigma(\tilde{A}) \ge a > o$. Weiter gelte eine Abschätzung $\|R(u)\| \le \omega(\|u\|)$ mit einer monotonen Funktion ω. Gibt es dann zu allen positiven Zahlen c ein $m > o$, derart daß

$$c + c_1\, \omega(m) < m$$

ist (mit einer von β und $\tilde{A}$ abhängigen Konstanten c_1), so folgt: Jede strikte Lösung u von (2.9) (mit $\bar{\beta} < \beta < 1$) existiert global.

Bemerkung: re $\sigma(\tilde{A}) \ge a > o$ ist insbesondere dann erfüllt, falls $M = o$ ist.

Beweis: Für u erhält man wie im Beweis von Satz 2.6 die Abschätzungen (s. (2.14)):

(2.22)

$$\text{a)}\ \|u(t)\| \le \|u(o)\| + c_2 \int_o^t e^{-\delta(t-s)}(t-s)^{-\beta}(\|u(s)\| + \omega(\|u(s)\|))ds$$

für $t \ge o$

$$\text{b)}\ \|u(t)\| \le c_3\, t^{-\beta}\, \|u(o)\| + c_4 \int_o^t e^{-\delta(t-s)}(t-s)^{-\beta}\omega(\|u(s)\|)ds$$

für $t > o$.

Aus (2.22) a) folgt: $\|u(t)\| \le 2\,\|u(o)\|$ für $t \in [0,\tau_o]$ und für $t \ge \tau_o$ gilt wegen (2.22) b):

$$\|u(t)\| \le c_5\, \|u(o)\| + c_4 \int_o^t e^{-\delta(t-s)}(t-s)^{-\beta}\omega(\|u(s)\|)ds \quad .$$

Zu $c = c_5\, \|u(o)\|$ und $c_1 = c_4 \int_o^t e^{-\delta s}\, s^{-\beta}\, ds$ gibt es nun ein m, derart daß $c + c_1\, \omega(m) < m$ ist. Damit ist die Menge $J = \{t \mid \|u(s)\| \le m \text{ für } s \in [0,t]\}$ abgeschlossen und offen in $[o,\infty)$, so daß $J = [o,\infty)$ ist. Die a priori-Abschätzung

$$\|u(t)\| \le m \qquad , t \in [o,\infty),$$

liefert dann mittels Satz 1.14 und 1.7 die Behauptung.

Korollar 2.9 Es sei $M = o$ und es gelte $\|R(u)\| \le \omega(\|u\|)$ mit einer monotonen Funktion ω. Gibt es dann ein $m > o$, derart daß

$$\|u_o\| + c_1\, \omega(m) < m \qquad , c_1 = \int_o^\infty e^{-\delta s}\, s^{-\beta}\, ds,$$

ist, so existiert jede strikte Lösung von (2.9) mit $u(o) = u_o$ global.

Beweis: Für u gilt nämlich die Abschätzung

$$\|u(t)\| \le \|u(o)\| + \int_o^t e^{-\delta(t-s)}(t-s)^{-\beta}\omega(\|u(s)\|)ds \ , \qquad t \ge o,$$

woraus wie beim Beweis von Satz 2.8 die Behauptung folgt.

§ 5 Kommentare

Eine Verallgemeinerung des Stabilitätssatzes von Lyapunov für eine lineare Evolutionsgleichung im Banachraum ist das Hille-Yosida-Theorem. Für asymptotische Stabilitätsaussagen genügt sogar im linearen Fall die Positivität des Spektrums (re $\sigma(A) > o$) allein nicht, wie u.a. in den Arbeiten von Datko und Pazy ([11], [41]) gezeigt wird.

Ist der lineare Operator gestört, sind die Stabilitätsergebnisse von Prodi [43] und Jooss [24] zu erwähnen. Beide verwenden Darstellungssätze der Halbgruppen durch die Resolvente (s. auch Kommentar zu Kapitel 3).

Das Stabilitätsergebnis von Pao [39] gilt nur für beschränkte (sein Anwendungsbeispiel ist im autonomen Fall ein Spezialfall von Satz 2.6) und von Geršt [22] für analytische Nichtlinearitäten.

Ein Instabilitätssatz stammt von Sattinger [44], allerdings nur innerhalb der Klasse der schwachen Lösungen. Er folgt aus dem Satz 2.7.

In den Arbeiten von Fujita und Watanabe ([19], [20]) wird an konkreten Evolutionsgleichungen gezeigt, wann die Norm der Lösung in endlicher Zeit unendlich wird ("blowing up"). Für streng konvexe Nichtlinearitäten wird das Problem auf Vergleichssätze bei gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückgeführt. Es sei noch bemerkt, daß die Bedingung in Satz 2.8 eine Verallgemeinerung des Wintnerschen Kriteriums darstellt.

Kapitel 3

Fastlineare parabolische Anfangs- und Randwertprobleme

§ 1 Definition und Hilfssätze über stark elliptische selbstadjungierte Differentialoperatoren.

Unter einem fastlinearen parabolischen Anfangs- und Randwertproblem in einem beschränkten Gebiet Ω des $\mathbb{R}^n$ wird verstanden:

$$(3.1)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} &= -A\,\underline{u} - M\,\underline{u} + F(\underline{u}) && \text{in } \Omega \times (0,T) \\ B_j\,\underline{u} &= o && \text{auf } \partial\Omega \times (0,T),\ j = o,\dots,k-1 \\ \underline{u}(o) &= \underline{u}_o && \text{in } \Omega \end{aligned}$$

Dabei ist $\underline{u}:\Omega \times [0,T) \to \mathbb{R}^r$, A ein stark elliptischer, M ein linearer Differentialoperator, F ein nichtlinearer (Differential)-Operator und B_j lineare (Differential)-Randoperatoren. Es ist in diesem Kapitel das Ziel, die abstrakten Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel auf das Problem (3.1) anzuwenden.

Da im folgenden sowohl Einbettungssätze, Regularitätssätze, Sätze aus der Theorie der Interpolationsräume und schließlich Sätze über die "Spur" von Funktionen über Ω auf $\partial\Omega$ benötigt werden, wird für den Rand $\partial\Omega$ der Einfachheit halber vorausgesetzt:

$$(3.2)\qquad \begin{cases} \Omega \subset \mathbb{R}^n & \text{ist beschränktes Gebiet,} \\ \partial\Omega & \text{ist eine } (n-1)\text{-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse } C^\infty. \end{cases}$$

Über Ω werden für $r \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_o$ die Funktionenräume definiert:

$C_m(\bar{\Omega})^r = \{\underline{u} \mid \underline{u}: \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^r,\ \underline{u}$ m-fach stetig differenzierbar in $\bar{\Omega}\}$,

$C_o^m(\Omega)^r = \{\underline{u} \mid \underline{u} \in C_m(\Omega)^r$, supp $\underline{u} \subset \Omega\}$,

(supp $\underline{u}$ ist der Träger von $\underline{u}$).

Mit folgendem Skalarprodukt und der Norm:

$$(\underline{u},\underline{v})_m = \sum_{i=1}^{r} \sum_{|\gamma|\le m} \int_\Omega D_\gamma u_i(x)\, D_\gamma v_i(x)dx$$

$$||\underline{u}||_m = \{(\underline{u},\underline{u})_m\}^{\frac{1}{2}}$$

$$(\underline{u} = (u_1,\dots,u_r),\ \gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_n) \in \mathbb{N}_o^n\ ,\ D_\gamma = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial^{\gamma_1}x_1 \dots \partial^{\gamma_n}x_n}\ , |\gamma| = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i)$$

können die Hilberträume

$$H_m(\Omega)^r = cl_{\|\ \|_m}\, C_m(\bar{\Omega})^r,\quad \mathring{H}_m(\Omega)^r = cl_{\|\ \|_m}\, C_o^m(\Omega)^r$$

definiert werden, die mit (dem r-fachen Produkt) der bekannten Sobolevräume übereinstimmen. ($cl_{\|\ \|_m}$ bedeutet der Abschluß bezüglich der Norm $\|\ \|_m$)
Es sei noch bemerkt, daß $H_o(\Omega)^r = \mathring{H}_o(\Omega)^r = L_2(\Omega)^r$ und $\mathring{H}_m(\Omega)^r = cl_{\|\ \|_m} C_o^\infty(\Omega)^r$ gilt. (s. [14], Part 1) Für $r = 1$ wird $\underline{u} = u$ und $H_m(\Omega)^1 = H_m(\Omega)$ usw. geschrieben.

Mit zwei Elementen $u,v \in H_m(\Omega)$ liegt i.a. das Produkt uv (definiert durch $(uv)(x) = u(x)v(x)$, $x \in \Omega$) nicht in $H_m(\Omega)$. Indes gilt folgendes

Lemma 3.1 Sei $m > \frac{n}{2}$. Dann sind $H_m(\Omega)$ und $\mathring{H}_m(\Omega)$ Banachalgebren, d.h. mit $u,v \in H_m(\Omega)$ ($\mathring{H}_m(\Omega)$) ist auch $uv \in H_m(\Omega)$ ($\mathring{H}_m(\Omega)$) und es gilt

$$||uv||_m \le \gamma_7(m)\, ||u||_m\, ||v||_m \ .$$

Zum Beweis wird auf den Anhang verwiesen.

Mit A wird im folgenden ein symmetrischer, stark elliptischer Differentialoperator der Ordnung 2p bezeichnet:

$$
(3.3)\begin{cases}
A\,\underline{u} = \sum\limits_{|\alpha|,|\beta|\le p} (-1)^{|\alpha|} D_\alpha \left[a^{\alpha\beta} D_\beta \underline{u}\right] \\[2ex]
a^{\alpha\beta} = (a_{ik}^{\alpha\beta}(x))_{i,k=1,..,r} \quad , \; a_{ik}^{\alpha\beta} = a_{ki}^{\alpha\beta} \in C_\infty(\bar{\Omega}), \quad a^{\alpha\beta} = a^{\beta\alpha} \; , \\[2ex]
\sum\limits_{i,k=1}^{r} \sum\limits_{|\alpha|=|\beta|=p} a_{ik}^{\alpha\beta}(x)\, \xi_\alpha\, \xi_\beta\, \eta^i \eta^k \ge c_o |\xi|^{2p} |\eta|^2 \; , \; c_o > o, \\[2ex]
\text{für alle } x \in \bar{\Omega}, \; \xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n \; , \; \eta = (\eta^1,\dots,\eta^r) \in \mathbb{R}^r, \\[2ex]
\text{mit } \xi_\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} \quad \text{für } \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n). \\[2ex]
(D_\beta\, \underline{u} = (D_\beta u_1,\dots,D_\beta u_r)).
\end{cases}
$$

A wird folgende symmetrische Bilinearform zugeordnet:

$$(3.4)\; B(\underline{u},\underline{v}) = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{r} \sum_{|\alpha|,|\beta|\le p} a_{ik}^{\alpha\beta}\, D_\alpha u_i\, D_\beta v_k \, dx \; .$$

Sei V ein Hilbertraum mit $\overset{\circ}{H}_p(\Omega)^r \subset V \subset H_p(\Omega)^r$.

Definition 3.2 B heißt V-koerziv, wenn ein $\lambda_o \in \mathbb{R}$ und eine Konstante $c > o$ derart existiert, daß

$$(3.5)\; B(\underline{u},\underline{u}) \ge c\, \|\underline{u}\|_p^2 - \lambda_o \|\underline{u}\|_o^2 \qquad \text{für alle } \underline{u} \in V$$

ist. Gilt (3.5) mit $\lambda_o = o$, heißt B stark V-koerziv.

Für $V = \overset{o}{H}_p(\Omega)^r$ ist (3.5) die bekannte Gårdingsche Ungleichung für stark elliptische Differentialoperatoren (3.3). Mit der V-Koerzivität von Bilinearformen der Form (3.4) für $V = H_p(\Omega)$ $(r=1)$ hat sich zuerst Aronszajn beschäftigt. Eine Lösung des Problems für allgemeine Räume V, die durch Randbedingungen definiert sind, hat Agmon in [1] gegeben $(r=1)$:

Seien B_j , $j=o,\dots,k-1$, $k \le p$, ein (möglicherweise leeres) System von Randoperatoren der Form

$$(3.6)\qquad \begin{aligned} &B_j\, u = \sum_{|\alpha|\le p_j} b_j^\alpha\, D_\alpha\, u\,, \qquad o \le p_j \le p-1 \\ &b_j^\alpha \in C_\infty(\bar\Omega) \end{aligned}$$

Für

$$(3.7)\quad V = \mathrm{cl}_{\|\ \|_p} \{u \mid u \in C_p(\bar\Omega),\ B_j\, u = o \text{ auf } \partial\Omega\ ,\ j=o,\dots,k-1\}$$

sind in [1]p. 216 hinreichende (und auch notwendige) Bedingungen an die B_j angegeben, unter den B V-koerziv ist. Der Spezialfall $V = \overset{o}{H}_p(\Omega)$ (Dirichlet-Randbedingungen) ist darin enthalten (s.[14] p. 39):

$$\overset{o}{H}_p(\Omega) = \mathrm{cl}_{\|\ \|_p} \{u \mid u \in C_p(\bar\Omega),\ D_\alpha\, u = o \text{ auf } \partial\Omega\ ,|\alpha| \le p-1\};$$

ebenso $V = H_p(\Omega)$.

Weiter wird vorausgesetzt, daß (3.6) ein <u>normales</u> System von Randoperatoren ist (s. [32], p. 125, Def. 1.4); d.h. insbesondere, daß alle B_j jeweils von verschiedener Ordnung sind.

Dann gibt es zu den gegebenen k weitere p-k Randoperatoren B_j, $j=k,\dots,p-1$, und Φ_j, $j=o,\dots,p-1$, derart daß unter den Ordnungen von $\{B_j\}_{j=o}^{p-1}$ alle natürlichen Zahlen zwischen o und p-1 auftreten und die Ordnung von Φ_j gleich $2p-1-\mathrm{ord}\, B_j$ ist, und daß die Greensche Formel:

$$B(u,v) = \int_{\Omega} Au\, v\, dx - \sum_{j=o}^{p-1} \int_{\partial\Omega} \Phi_j\, u\, B_j\, v\, d\sigma$$

für alle $u,v \in C_{2p}(\bar{\Omega})$ gilt. (s. [32] p. 133)

Genügt nun v den Randbedingungen $B_j v = o$ auf $\partial\Omega$, $j=o,\dots,k-1$, so folgt

$$(3.8) \qquad B(u,v) = (A\,u,v)_o - \sum_{j=k}^{p-1} \int_{\partial\Omega} \Phi_j\, u\, B_j\, v\, d\sigma$$

Aufgrund des "Theorems über die Spur" von Elementen aus $H_{2p}(\Omega)$ auf $\partial\Omega$ (s. Th. 8.3 in [32] p. 44) gilt (3.8) durch Abschluß auch für alle $u \in H_{2p}(\Omega)$, $v \in V$. (s. Bem. 2.2 in [32] ,p. 132).

Angenommen, es existiert ein $u \in H_{2p}(\Omega) \cap V$, so daß

$$(3.9) \qquad B(u,v) = (f,v)_o \qquad \text{für alle } v \in V$$

ist. Mittels (3.8) folgt dann (s. Lemma 2.2 in [32], p. 129):

$$(3.10) \qquad \begin{cases} A\,u = f & \text{in } \Omega \\ B_j u = o,\ i=o,\dots,k-1 & \text{auf } \partial\Omega \\ \Phi_j u = o,\ j=k,\dots,p-1 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Bemerkung: $B_j u = o$, $\Phi_j u = o$ in $L_2(\partial\Omega)$.

Diese letzten Randbedingungen in (3.10) nennt man "natürliche" Randbedingungen; sie sind von einer Ordnung zwischen p und 2p-1.

Ist B stark V-koerziv, dann existiert zu jedem $f \in H_o(\Omega)$ nach dem Satz von Riesz ein $u \in V$, derart daß

$$B(u,v) = (f,v)_o \qquad \text{für alle } v \in V$$

gilt. Nach dem Regularitätssatz in [5]p. 359 ist dann $u \in H_{2p}(\Omega) \cap V$ und es gilt die a priori-Abschätzung

(3.11) $$\|u\|_{2p} \leq c_1\{ \|A\,u\|_o + \|u\|_o\} .$$

Wegen (3.9), (3.10) folgt dann sogar:

$$u \in cl_{\|\ \|_{2p}} \{u \mid u \in C_{2p}(\bar{\Omega}),\ \ \Phi_j u = o \text{ auf } \partial\Omega,\ j=k,\dots,p-1\} =: H_{2p}(\Omega;\{\Phi_j\}_{j=k}^{p-1})$$

und $B(u,v) = (A\,u,v)_o$ für alle $v \in V$ (s.(3.8)).

Zusammen mit (3.5) und (3.11) lautet das Ergebnis:

Satz 3.3 A sei stark elliptisch, symmetrisch, von der Ordnung 2p (s. (3.3) mit r=1) und B sei stark V-koerziv mit $V = H_p(\Omega;\ \{B_j\}_{j=o}^{k-1})$. Weiter Sei $\{B_j\}_{j=o}^{k-1}$ ein normales System von Randoperatoren (s. [32] Def. 1.4, p. 125).

Dann ist der Operator $A:H_o(\Omega) \to H_o(\Omega)$ mit

(3.12) $$D(A) = H_{2p}(\Omega;\{ \phi_j\}_{j=k}^{p-1}) \cap H_p(\Omega;\{B_j\}_{j=o}^{k-1})$$

(mit den "natürlichen" Randoperatoren $\{\Phi_j\}_{j=k}^{p-1}$) surjektiv, selbstadjungiert, positiv definit und wegen

(3.13) $$\|u\|_{2p} \leq c_2 \|A\,u\|_o$$

ist A^{-1} kompakt in $H_o(\Omega)$.

Bemerkung: Für Dirichlet-Randbedingungen gilt der Satz 3.3 auch für r > 1: *A sei wie in (3.3) und die Gårdingsche Ungleichung sei mit $\lambda_o = o$ erfüllt.* Dann ist $A:H_o(\Omega)^r \to H_o(\Omega)^r$ mit $D(A) = H_{2p}(\Omega)^r \cap \mathring{H}_p(\Omega)^r$ surjektiv, selbstadjungiert, positiv definit und wegen (3.13) ist A^{-1} kompakt in $H_o(\Omega)^r$.

Die wesentlichen Eigenschaften von A werden in folgender Bedingung zusammengefaßt:

$$(3.14)\quad \begin{cases} A: H_o(\Omega)^r \to H_o(\Omega)^r\ ,\ r \geq 1,\ \text{ist selbstadjungiert, } \overset{\text{positiv definit}}{\cancel{\text{surjektiv}}}, \\ A^{-1}\ \text{ist kompakt in}\ H_o(\Omega)^r\ \text{und für den Definitionsbereich}\ D(A) \\ \text{gilt algebraisch und topologisch:}\ \overset{\circ}{H}_{2p}(\Omega)^r \subset D(A) \subset H_{2p}(\Omega)^r. \end{cases}$$

Es ist hier absichtlich der "variationelle Zugang" zu diesen selbstadjungierten Randwertproblemen gewählt worden, da durch die starke Koerzitivität von B die positive Definitheit von A garantiert wird. Die starke Koerzitivität von B kann man leicht aus der Koerzitivität von B durch Addition einer Konstanten zu A erreichen.

Ein anderer Zugang zu einem sogenannten "regulären Randwertproblem" (s. [32] p. 165 ff)

$$\begin{aligned} A\,u &= f && \text{in } \Omega \\ B_j u &= o && \text{auf } \partial\Omega \quad ,j=o,\dots,p-1 \end{aligned}$$

wobei hier die Ordnungen der B_j bis 2p-1 gehen dürfen, benutzt die Theorie der Fredholm-Operatoren: bei eindeutiger Lösbarkeit folgt (hier im selbstadjungierten Fall) die Lösbarkeit für alle $f \in H_o(\Omega)$. Diese sowie die Frage der positiven Definitheit bedarf allerdings einiger Zusatzvoraussetzungen für A. Ich verweise hier auf [32] Chap. 2, [14] p. 73 ff und den Übersichtsartikel von Agmon [2] und die dort angegebene Literatur.

Speziell für Dirichlet-Randbedingungen hat man folgenden

Satz 3.4 A sei ein Operator in $H_o(\Omega)$ und genüge (3.14) mit $D(A) = H_{2p}(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}_p(\Omega)$. Weiter sei $p > \frac{n}{4}$. Dann ist D(A) eine Banachalgebra.

Beweis: Wegen Lemma 3.1 bleibt nur noch zu zeigen, daß mit $u,v \in D(A)$ das Produkt in $\overset{\circ}{H}_p(\Omega)$ liegt. Zunächst existieren Folgen:

$$\{u_n\} \subset C_{2p}(\bar{\Omega}) \quad \text{mit} \quad u_n \longrightarrow u \quad \text{in der } \| \ \|_{2p}\text{-Norm},$$
$$\{v_n\} \quad C_o^{2p}(\Omega) \quad \text{mit} \quad v_n \longrightarrow v \quad \text{in der } \| \ \|_p\text{-Norm}.$$

Nach dem Lemma 4.2 im Anhang gilt die Abschätzung

$$\|u_n v_n - u_m v_m\|_p \leq c_1\{ \|u_n - u_m\|_{2p} \|v_n\|_p + \|v_n - v_m\|_p \|u_m\|_{2p}\}$$

Da $u_n v_n \in C_o^{2p}(\Omega)$ ist, gibt es also ein $w \in \overset{\circ}{H}_p(\Omega)$, derart daß $u_n v_n \longrightarrow w$ in der $\| \ \|_p$-Norm.

Andererseits gilt nach dem Lemma 4.3 im Anhang

$$\|u_n v_n - uv\|_o \leq c_2\{ \|u_n - u\|_p \|v_n\|_p + \|v_n - v\|_p \|u\|_p\} ,$$

woraus $uv = w \in \overset{\circ}{H}_p(\Omega)$ folgt. Schließlich ist

$$\|A(uv)\|_o \leq c_3 \|uv\|_{2p} \leq c_4 \|u\|_{2p} \|v\|_{2p} \leq c_5 \|Au\|_o \|Av\|_o .$$

§ 2 Zusammenhang zwischen den Definitionsbereichen gebrochener Potenzen von A und Interpolationsräumen zwischen Sobolevräumen.

X, Y seien Hilberträume, $X \subset Y$, wobei X dicht in Y liegt und stetig in Y eingebettet werden kann. Dann werden mit $[X,Y]_\theta$, $o \leq \theta \leq 1$, die Interpolationsräume ("espaces intermédiaires") zwischen X und Y bezeichnet. Zur Definition verweise ich auf [32],p. 11 ff.. $[X,Y]_\theta$ sind Hilberträume, deren Norm auf verschiedene äquivalente Weisen definiert werden kann (s. [32] p. 13, p. 54). Weiter ist $X \subset [X,Y]_\theta \subset Y$, wobei die Einbettungen stetig sind, und $[X,Y]_o = X$, $[X,Y]_1 = Y$.

Lemma 3.5 A sei ein selbstadjungierter, positiv definiter Operator in Y. Sei $\alpha \geq \beta \geq o$, $o < \theta < 1$.

Dann gilt algebraisch und topologisch:

$$[D(A^{\alpha}), D(A^{\beta})]_{\theta} = D(A^{(1-\theta)\alpha+\theta\beta})$$

Beweis: s. [32], Théorème 6.1, p. 34.

Definition 3.6 Sei $m \in \mathbb{N}$ und $o \leq \theta \leq 1$.

(3.15) $H_s(\Omega) := [H_m(\Omega), H_o(\Omega)]_{\theta}$ mit $(1-\theta)m = s$

(3.16) $\mathring{H}_s(\Omega) := [\mathring{H}_m(\Omega), H_o(\Omega)]_{\theta}$ mit $(1-\theta)m = s$

und $s \neq k + \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{N}_o$

Die Definition (3.15) ist unabhängig von m und stimmt für ganzzahlige s mit der Definition in § 1 überein, wie in [32] p. 45 ff. gezeigt wird. Bezeichnet man die Norm in dem Interpolationsraum (3.15) mit $\| \ \|_s$, so gilt:

(3.17) $\mathring{H}_s(\Omega) = cl_{\| \ \|_s} C_o^{\infty}(\Omega)$, (s. [32](11.1) p. 60, (11.43) p. 70),

d.h. $\mathring{H}_s(\Omega)$ ist abgeschlossener Unterraum von $H_s(\Omega)$, und

(3.18) $\mathring{H}_s(\Omega) = H_s(\Omega)$ für $o \leq s < \frac{1}{2}$ (s. [32], Th. 11.1, p. 60) .

Definiert man nun $H_s(\Omega)^r$ bzw. $\mathring{H}_s(\Omega)^r$ als übliches r-faches Produkt der Hilberträume $H_s(\Omega)$, $\mathring{H}_s(\Omega)$ (mit dem Skalarprodukt $(\underline{u},\underline{v})_s = \sum_{i=1}^{r} (u_i,v_i)_s$), so gilt:

$$H_s(\Omega)^r = [H_m(\Omega)^r, H_o(\Omega)^r]_{\theta} \quad ,(1-\theta)m = s$$

(s. dazu die Def. in [32]p. 11 f. und p. 112)

Damit erhält man folgenden wichtigen

Satz 3.7 A sei ein Operator in $H_o(\Omega)^r$ und genüge (3.14).

Dann gilt algebraisch und topologisch:

$$H_s(\Omega)^r \subset D(A^{\frac{s}{2p}}) \qquad \text{für } o \leq s < \frac{1}{2}$$

Beweis: Mit id werde die Identität bezeichnet. Dann ist

$$\text{id} \in \mathcal{L}(\mathring{H}_{2p}(\Omega)^r, D(A)) \cap \mathcal{L}(H_o(\Omega)^r, H_o(\Omega)^r)$$

(d.h.: $\text{id}|\mathring{H}_{2p}(\Omega)^r \in \mathcal{L}(\mathring{H}_{2p}(\Omega)^r, D(A))$ und $\text{id} \in \mathcal{L}(H_o(\Omega)^r, H_o(\Omega)^r)$).

Nach dem Théorème 5.1 in [32] p. 32 (Interpolations-Theorem) ist dann auch

$$\text{id} \in \mathcal{L}([\mathring{H}_{2p}(\Omega)^r, H_o(\Omega)^r]_\theta, [D(A), H_o(\Omega)^r]_\theta), \ o < \theta < 1.$$

Mit dem Lemma 3.5 ($D(A^o) = H_o(\Omega)^r$), (3.16) und (3.18) folgt daraus:

$$\text{id} \in \mathcal{L}(H_s(\Omega)^r, D(A^{1-\theta})) \qquad \text{mit } s = (1-\theta)2p < \frac{1}{2} \ .$$

Eine Umkehrung von Satz 3.7 ist der

Satz 3.8 A sei ein Operator in $H_o(\Omega)^r$ und genüge (3.14).

Dann gilt algebraisch und topologisch:

$$D(A^\alpha) \subset H_s(\Omega)^r \qquad \text{für } \frac{s}{2p} \leq \alpha \leq 1.$$

Beweis: 1) $s = 2p$, $\alpha = 1$.

Dann gilt die Behauptung wegen (3.14).

2) $s < 2p$, $s = 2p(1-\theta)$ mit $o < \theta < 1$.

Wegen $\text{id} \in \mathcal{L}(D(A), H_{2p}(\Omega)^r) \cap \mathcal{L}(H_o(\Omega)^r, H_o(\Omega)^r)$

ist $\quad \mathrm{id} \in \mathcal{L}([D(A), H_o(\Omega)^r]_\theta, [H_{2p}(\Omega)^r, H_o(\Omega)^r]_\theta)$

d.h. $\quad \mathrm{id} \in \mathcal{L}(D(A^{1-\theta}), \quad H_{2p(1-\theta)}(\Omega)^r)$

Wegen $D(A^\alpha) \subset D(A^{1-\theta})$ für $1-\theta \leq \alpha$ gilt die Behauptung.

<u>Satz 3.9</u> A sei ein Operator in $H_o(\Omega)^r$ und genüge (3.14).
Dann gilt für den linearen Differentialoperator D_γ:

$$D_\gamma \in \mathcal{L}(D(A^\alpha), L_t(\Omega)^r) \qquad , \ \|\gamma\| \leq 2p$$

mit

a) $2p - \|\gamma\| > \frac{n}{2} \quad : \quad 1 > \alpha \geq \frac{\|\gamma\|}{2p} + \frac{n}{4p}\left(1 - \frac{2}{t}\right)$

b) $2p - \|\gamma\| \leq \frac{n}{2} \quad : \quad 1 > \alpha \geq 1-\theta\left(1 - \frac{\|\gamma\|}{2p}\right), \ o < \theta < 1$

$$\frac{1}{t} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{2}$$

$$q \leq \frac{2n}{n-2(2p-\|\gamma\|)}$$

Dabei ist $D_\gamma \underline{u} = (D_{\gamma_1} u_1, \ldots, D_{\gamma_r} u_r)$, $\|\gamma\| = \max(|\gamma_1|, \ldots, |\gamma_r|)$

<u>Beweis:</u> a) $2p - \|\gamma\| > \frac{n}{2}$

Wegen dem Sobolevschen Einbettungssatz+) (s. [14], Th. 10.2, p. 28) ist:

$$D_\gamma \in \mathcal{L}(H_m(\Omega)^r, L_t(\Omega)^r)$$

mit $\quad t \leq \frac{2n}{n-2(m-\|\gamma\|)} \quad$ oder $\quad m \geq \|\gamma\| + \frac{n}{2}\left(1 - \frac{2}{t}\right)$

Mit Satz 3.8 folgt

$$D_\gamma \in \mathcal{L}(D(A^\alpha), L_t(\Omega)^r) \ \text{ mit } \alpha \geq \frac{m}{2p} .$$

+) Korrektur: Man benötigt hier den Einbettungssatz
$H_s(\Omega) \subset L_t(\Omega)$ für $t \leq \frac{2n}{n-2s}$, $s < \frac{n}{2}$ und <u>reelles</u> s .
Dieser folgt aus dem Theorem 8.1 in
J. Peetre: Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff
Ann.Inst.Fourier, <u>16</u>, 1 (1966), 279 - 317.

b) $2p - \|\gamma\| \leq \frac{n}{2}$

Wegen Satz 3.8 ist

$$D_\gamma \in \mathcal{L}(D(A^{\frac{\|\gamma\|}{2p}}), H_o(\Omega)^r)$$

und wegen (3.14) und dem Sobolevschen Einbettungssatz

$$D_\gamma \in \mathcal{L}(D(A), L_q(\Omega)^r) \quad \text{mit } q \leq \frac{2n}{n-2(2p-\|\gamma\|)} .$$

Damit folgt nach dem Interpolationstheorem von Lions:

$$D_\gamma \in \mathcal{L}([D(A), D(A^{\frac{\|\gamma\|}{2p}})]_\theta , [L_q(\Omega)^r, L_2(\Omega)^r]_\theta)$$

für $o < \theta < 1$. Nach dem Satz 4.1 in [31]p. 155 gilt algebraisch und topologisch:

$$[L_q(\Omega)^r , L_2(\Omega)^r]_\theta \subset L_t(\Omega)^r , \quad \frac{1}{t} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{2} .$$

Mit $[D(A), D(A^{\frac{\|\gamma\|}{2p}})]_\theta = D(A^{1-\theta(1-\frac{\|\gamma\|}{2p})})$ (s. Lemma 3.5) folgt dann die Behauptung.

§ 3 Nichtlineare (Differential-) Operatoren in $H_o(\Omega)$ und $D(A)$.

Das Ziel dieses Paragraphen ist es, Realisierungen von nichtlinearen Operatoren der Form $R = A^{-\alpha_1} \circ F \circ A^{-\alpha_2}$ mit $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ in Hilberträumen $E = H_o(\Omega)^r$ oder $E = D(A)$ anzugeben, die den in den ersten Kapiteln aufgestellten Bedingungen genügen.

<u>Satz 3.10</u> Sei $f \in C_m(\mathbb{R})$ und $m > \frac{n}{2}$.

Dann ist die Abbildung $u \mapsto f(u)$ in $H_m(\Omega)$ stetig. (Dabei ist $f(u)(x) = f(u(x))$ für alle $x \in \bar{\Omega}$.)

Bemerkung: $u \in H_m(\Omega)$, $m > \frac{n}{2}$, impliziert $u \in C_o(\bar{\Omega})$.

<u>Beweis:</u> Sei zuerst $u \in C_m(\bar{\Omega})$; dann ist auch $f(u) \in C_m(\bar{\Omega})$ und für eine Differentation $D_\gamma f(u)$ erhält man eine Darstellung der Form $(x \in \Omega, |\gamma| \leq m)$:

$$(3.19) \quad D_\gamma f(u(x)) = \sum_{k=1}^{|\gamma|} f^{(k)}(u(x)) \sum_{\sum|\alpha_i| \leq |\gamma|} c_{\alpha_1,\dots,\alpha_k} D_{\alpha_1} u(x) \dots D_{\alpha_k} u(x)$$

mit geeigneten konstanten Koeffizienten $c_{\alpha_1,\dots,\alpha_k}$.

Da $m > \frac{n}{2}$ vorausgesetzt ist, gilt nach dem Sobolevschen Einbettungssatz

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| \leq c_1 \|u\|_m \qquad \text{oder}$$

$$(3.20) \quad \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f^{(k)}(u(x))| \leq \sup_{|t| \leq c_1 \|u\|_m} |f^{(k)}(t)| \quad , \; o \leq k \leq m.$$

Um $\|f(u) - f(v)\|_m$, $u,v \in C_m(\bar{\Omega})$, abzuschätzen, genügt es nach (3.19)

$$\int_\Omega (f^{(k)}(u(x)) D_{\alpha_1} u(x) \dots D_{\alpha_k} u(x) - f^{(k)}(v(x)) D_{\alpha_1} v(x) \dots D_{\alpha_k} v(x))^2 \, dx$$

mit $o \leq k \leq m$ abzuschätzen. Wegen

$$f^{(k)}(u) D_{\alpha_1} u \dots D_{\alpha_k} u - f^{(k)}(v) D_{\alpha_1} v \dots D_{\alpha_k} v$$

$$= (f^{(k)}(u) - f^{(k)}(v)) D_{\alpha_1} u \dots D_{\alpha_k} u + f^{(k)}(v)(D_{\alpha_1} u - D_{\alpha_1} v) D_{\alpha_2} u \dots D_{\alpha_k} u$$

$$+ \dots + f^{(k)}(v) D_{\alpha_1} v \dots D_{\alpha_{k-1}} v (D_{\alpha_k} u - D_{\alpha_k} v)$$

folgt aus Lemma 4.1 im Anhang und (3.20):

$$\int_\Omega (f^{(k)}(u)\, D_{\alpha_1} u \ldots D_{\alpha_k} u - f^{(k)}(v)\, D_{\alpha_1} v \ldots D_{\alpha_k} v)^2\, dx$$

$$\leq c_2 \{ \sup_{x\in\bar\Omega} |f^{(k)}(u(x)) - f^{(k)}(v(x))|^2 \, \|u\|_m^{2k}$$

$$+ \sup_{|t|\leq c_1 \|v\|_m} |f^{(k)}(t)| \, \|u-v\|_m^2 \sum_{i+j=k-1} \|u\|_m^{2i} \|v\|_m^{2j} \}$$

Ist nun $\{u_n\} \subset C_m(\bar\Omega)$ eine Cauchy-Folge in $H_m(\Omega)$, so ist auch $\{f(u_n)\} \subset C_m(\bar\Omega)$ eine Cauchy-Folge in $H_m(\Omega)$. Damit folgt, daß mit $u \in H_m(\Omega)$ auch $f(u) \in H_m(\Omega)$ ist (denn $u_n \longrightarrow u$ in $H_m(\Omega)$ impliziert $f(u_n) \longrightarrow w$ in $H_m(\Omega)$ und $f(u_n) \rightarrow f(u)$ in $H_o(\Omega)$), und daß die Abbildung $u \mapsto f(u)$ in $H_m(\Omega)$ stetig ist.

Bemerkung: Für $u \in H_m(\Omega)$, $f \in C_m(\mathbb{R})$, $m > \frac{n}{2}$, gilt:

$$(3.21) \quad \|f(u)\|_m \leq c \sum_{k=o}^{m} \sup_{|t|\leq c_1 \|u\|_m} |f^{(k)}(t)| \; \|u\|_m^k$$

<u>Korollar 3.11</u> Sei $f \in C_m(\mathbb{R}^r)^r$, $r \in \mathbb{N}$, $m > \frac{n}{2}$.

Dann ist die Abbildung $\underline{u} \longmapsto f(\underline{u})$ in $H_m(\Omega)^r$ stetig.

Zum <u>Beweis</u> ist die Formel (3.19) geeignet zu verallgemeinern.

<u>Satz 3.12</u> A sei ein Operator in $H_o(\Omega)^r$ und genüge (3.14); weiter sei $m < 2p - \frac{n}{2}$, $m \in \mathbb{N}_o$, $f \in C_{[\frac{n}{2}+1]}(\mathbb{R}^r)^r$.

Dann erfüllt $R(\underline{u}) = A^{-1+\frac{s}{2p}} f(D_\gamma(A^{-\eta}\underline{u}))$ mit $\|\gamma\| \leq m$, $o < s < \frac{1}{2}$, $o < \eta < \frac{s}{2p}$, die Voraussetzungen (1.12) und (1.19) in $E = D(A)$.

Beweis: Sei $\underline{u} \in D(A)$. Dann ist $\underline{u} \mapsto A^{-\eta}\,\underline{u}$ als Abbildung von $D(A)$ in $H_{2p}(\Omega)^r$ kompakt, $A^{-\eta}\,\underline{u} \mapsto D_\gamma A^{-\eta}\,\underline{u}$ als Abbildung von $H_{2p}(\Omega)^r$ in $H_{[\frac{n}{2}+1]}(\Omega)^r$ stetig und nach Korollar 3.11 ist $D_\gamma A^{-\eta}\,\underline{u} \mapsto f(D_\gamma A^{-\eta}\,\underline{u})$ in $H_{[\frac{n}{2}+1]}(\Omega)^r$ stetig. Nach dem Satz 3.7 ist $H_{[\frac{n}{2}+1]}(\Omega)$ stetig in $D(A^{\frac{s}{2p}+\varepsilon})$ einzubetten, woraus insgesamt die ~~schwache~~ starke Folgenstetigkeit und (1.19) für R in D(A) folgt.

Speziell für $D(A) = H_{2p}(\Omega)^r \cap \mathring{H}_p(\Omega)^r$ (Dirichlet-Randbedingungen) läßt sich durch analytisches f eine höhere "Differentiationsordnung" in der Nichtlinearität erreichen, sofern sich explizite Differentialoperatoren durch gebrochene Potenzen von A ausdrücken lassen:

Satz 3.13 A sei ein Operator in $H_o(\Omega)^r$ und genüge (3.14); weiter sei $p > \frac{n}{4}$, $f \in C_\infty(\mathbb{R}^r)^r$ und analytisch, d.h.

$$f_i(t_1,\dots,t_r) = \sum_{\nu_1,\dots,\nu_r} a^i_{\nu_1\dots\nu_r}\, t_1^{\nu_1}\dots t_r^{\nu_r}\ ,\ i=1,\dots,r,$$

mit einer auf ganz $\mathbb{R}^r$ absoluten Konvergenz.

Dann ist $R(\underline{u}) = f(A^\gamma(A^{-\alpha}\,\underline{u}))$ mit $\gamma < \alpha < 1$ eine Abbildung in $E = D(A) = H_{2p}(\Omega)^r \cap \mathring{H}_p(\Omega)^r$, die (1.12) und (1.17) genügt.

Beweis: Sei $\underline{u} \in D(A)$. Dann ist $\underline{u} \mapsto A^{-(\alpha-\gamma)}\underline{u}$ als Abbildung in $D(A)$ kompakt. Für $A^{-(\alpha-\gamma)}\underline{u} = \underline{w} \in D(A)$ ist wegen Satz 3.4 $w_1^{\nu_1}\dots w_r^{\nu_r}$ $H_{2p}(\Omega) \cap \mathring{H}_p(\Omega)$ und $\|w_1^{\nu_1}\dots w_r^{\nu_r}\|_{2p} \le (c_1\,\|w_1\|_{2p})^{\nu_1}\dots(c_1\,\|w_r\|_{2p})^{\nu_r}$. Deshalb ist (wegen der Konvergenz in der $\|\ \|_{2p}$-Norm) $f(\underline{w}) \in H_{2p}(\Omega)^r \cap \mathring{H}_p(\Omega)^r = D(A)$ und die Abbildung $\underline{w} \mapsto f(\underline{w})$ ist stetig in $D(A)$; R erfüllt (1.17) mit $\beta = 1$.

Bemerkung: Liegt für f nur eine absolute Konvergenz für $|t_i| \leq M$ vor, dann ist R nur in einer Kugel um 0 in D(A) definiert und erfüllt dort die Behauptung von Satz 3.13.

Im folgenden wird die Regularität von f abgeschwächt und entsprechend wirken die Nichtlinearitäten nur noch in $E = H_o(\Omega)^r$.

Satz 3.14 A sei ein Operator in $H_o(\Omega)^r$ und genüge (3.14); weiter sei $m < 2p - \frac{n}{2}$, $m \in \mathbb{N}_o$, $f \in C_1(\mathbb{R}^r)^r$.
Dann erfüllt $R(\underline{u}) = f(D_\gamma(A^{-\frac{s}{2p}}\underline{u}))$ mit $\|\gamma\| \leq m$ und $m + \frac{n}{2} < s < 2p$ die Voraussetzungen (1.12) und (1.19) in $E = H_o(\Omega)^r$.

Dem Beweis dieses Satzes wird ein Lemma vorangestellt:

Lemma 3.15 Sei $f \in C_1(\mathbb{R}^r)^r$
Dann ist die Abbildung $\underline{u} \mapsto f(\underline{u})$ von $H_s(\Omega)^r$ nach $H_t(\Omega)^r$ mit $s > \frac{n}{2}$ und $t < \min(1,s)$ $(s,t \in \mathbb{R})$ stetig.

Beweis von Satz 3.14: Sei $\underline{u} \in H_o(\Omega)^r$ und $m + \frac{n}{2} < \bar{s} < s < 2p$. Nach dem Satz 3.7 ist die Abbildung $\underline{u} \longmapsto A^{-\frac{s}{2p}}\underline{u}$ eine stetige lineare Abbildung von $H_o(\Omega)^r$ nach $H_s(\Omega)^r$. Da die Differentation D_γ ein stetiger linearer Operator von $H_s(\Omega)^r$ nach $H_{s-m}(\Omega)^r$ ist (s. [32] p. 50), die Einbettung von $H_{s-m}(\Omega)^r$ in $H_{\bar{s}-m}(\Omega)^r$ kompakt ist (s. [32] Th. 16.1, p. 110) und nach Voraussetzung $\bar{s}-m > \frac{n}{2}$ ist, ist deswegen und wegen Lemma 3.15 die Abbildung $\underline{u} \longmapsto f(D_\gamma(A^{-\frac{s}{2p}}\underline{u}))$ ~~schwach~~ stark folgenstetig als Abbildung von $H_o(\Omega)^r$ nach $H_t(\Omega)^r$, $t < \min(1,\bar{s}-m)$. (1.19) gilt wegen Satz 3.7.

Beweis von Lemma 3.15: Sei o.B.d.A $r = 1$. Nach [33] p. 55 und [38] p. 61 gilt $u \in H_t(\Omega)$, $0 < t < 1$, genau dann, falls

$$(3.22) \qquad \left(\|u\|_0^2 + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2t}} \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

ist; außerdem ist (3.22) mit der Norm in $H_t(\Omega)$ äquivalent.

Sei $u \in H_s(\Omega)$. Da $s > \frac{n}{2}$ vorausgesetzt ist, gilt $u \in C_0(\bar{\Omega})$ und

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| \leq c_1 \|u\|_s \, .$$

Das bedeutet:

$$|f(u(x)) - f(u(y))| \leq \sup_{|t| \leq c_1 \|u\|_s} |f'(t)| \, |u(x) - u(y)| \, .$$

Für $t < \bar{t} < \min(1,s)$ folgt damit:

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(u(x)) - f(u(y))|^2}{|x - y|^{n+2\bar{t}}} \, dx \, dy < \sup_{|t| \leq c_1 \|u\|_s} |f'(t)|^2 \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\bar{t}}} \, dx \, dy$$

woraus wegen (3.22) $f(u) \in H_{\bar{t}}(\Omega)$ und die Abschätzung

$$(3.23) \quad \|f(u)\|_t \leq c_2 \left\{ \sup_{|t| \leq c_1 \|u\|_s} |f(t)| + \sup_{|t| \leq c_1 \|u\|_s} |f'(t)| \, \|u\|_{\bar{t}} \right\}$$

folgt. Sei nun $\{u_n\} \subset H_s(\Omega)$ mit $u_n \longrightarrow u$ in $H_s(\Omega)$. Dann ist die Folge $\{f(u_n)\}$ wegen (3.23) beschränkt, woraus

$$(3.24) \qquad f(u_{n_k}) \rightharpoonup w \quad \text{in } H_{\bar{t}}(\Omega)$$

für eine geeignete Teilfolge und ein $w \in H_{\bar{t}}(\Omega)$ folgt.

$u_n \longrightarrow u$ in $H_s(\Omega)$ impliziert aber $f(u_n(x)) \to f(u(x))$ für jedes $x \in \bar{\Omega}$, was schließlich die Konvergenz

$$f(u_n) \longrightarrow f(u) \qquad \text{in } H_o(\Omega)$$

bedingt. Vergleich mit (3.24) liefert $w = f(u)$. Wegen der kompakten Einbettung von $H_{\bar{t}}(\Omega)$ in $H_t(\Omega)$ folgt

$$f(u_{n_k}) \longrightarrow f(u) \qquad \text{in } H_t(\Omega) \ .$$

Wiederholte Anwendung des Schlußes liefert: $f(u_n) \to f(u)$ in $H_t(\Omega)$.

<u>Satz 3.16</u> A sei ein Operator in $H_o(\Omega)^r$ und genüge (3.14); weiter sei $m < 2p - \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{n}{2}$, $m \in \mathbb{N}_o$, $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^r)^r$, $\frac{n}{n+2} < \alpha \leq 1$, d.h.

$$|f_i(t^1) - f_i(t^2)| \leq c|t^1 - t^2|^\alpha \ , \ t^1, t^2 \in \mathbb{R}^r, \ i=1,\dots,r \ .$$

Dann erfüllt $R(\underline{u}) = f(D_\gamma(A^{-\frac{s}{2p}} \underline{u}))$ mit $\|\gamma\| \leq m$ und $m + \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{n}{2} < s < 2p$ die Voraussetzungen (1.12) und (1.19) in $E = H_o(\Omega)^r$.

Der Beweis folgt genau wie der zu Satz 3.14 mit Hilfe von folgendem:

<u>Lemma 3.17</u> Sei $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^r)^r$ mit $\frac{n}{n+2} < \alpha \leq 1$.
Dann ist die Abbildung $\underline{u} \longmapsto f(\underline{u})$ von $H_s(\Omega)^r$ nach $H_t(\Omega)^r$ mit $1 > s > \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{n}{2}$ und $t < \alpha s - (1-\alpha)\frac{n}{2}$ stetig.

<u>Beweis:</u> Sei $r = 1$, $t < \bar{t} = \alpha s - (1-\alpha)\frac{n}{2}$ und $u \in C_\infty(\bar{\Omega})$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|f(u)\|_o^2 &\leq 2 \int_\Omega |f(u(x)) - f(o)|^2 \, dx + 2 \int_\Omega |f(o)|^2 \, dx \\ &\leq c_1 + c_2 \|u\|_o^{2\alpha} \end{aligned}$$

Weiter folgt (s. (3.22)):

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(u(x))-f(u(y))|^2}{|x-y|^{n+2\bar{t}}}\, dx\, dy \leq c \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^{2\alpha}}{|x-y|^{n+2\bar{t}}}\, dx\, dy$$

$$\leq c_3 \Big(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{(n+2\bar{t})\frac{1}{\alpha}}}\, dx\, dy\Big)^\alpha \leq c_4 \|u\|_s^{2\alpha}$$

oder:

(3.25) $\quad \|f(u)\|_{\bar{t}} \leq c_5 + c_6 \|u\|_s^\alpha \quad , u \in C_\infty(\bar{\Omega}).$

$(c_5 = o$, falls $f(o) = o)$

Nun ist aber $C_\infty(\bar{\Omega})$ dicht in $H_s(\Omega)$ (s. [32] p. 46), d.h. zu jedem $u \in H_s(\Omega)$ existiert $\{u_n\} \subset C_\infty(\bar{\Omega})$ mit

(3.26) $\quad u_n \longrightarrow u \quad$ in $H_s(\Omega)$.

Wegen (3.25) folgt:

(3.27) $\quad f(u_{n_k}) \rightharpoonup w \quad$ in $H_{\bar{t}}(\Omega)$.

(3.26) impliziert (s. [23]p. 192 f.), daß eine Teilfolge $\{u_{n_l}\} \subset \{u_{n_k}\}$ existiert, derart daß

$$u_{n_l}(x) \longrightarrow u(x) \qquad \text{fast überall in } \Omega$$

gilt. Daher auch:

$$f(u_{n_l}(x)) \longrightarrow f(u(x)) \qquad \text{fast überall in } \Omega.$$

Daraus und aus (3.25) folgt (s. Th. 13.44 in [23] ,p. 207):

$$f(u_{n_l}) \rightharpoonup f(u) \qquad \text{in } H_o(\Omega)$$

Ein Vergleich mit (3.27) zeigt: $w = f(u) \in H_{\bar{t}}(\Omega)$ und

$$f(u_{n_k}) \longrightarrow f(u) \qquad \text{in } H_t(\Omega) .$$

Wiederholte Anwendung dieses Schlusses liefert: $f(u_n) \longrightarrow f(u)$ in $H_t(\Omega)$.

Satz 3.18 A sei ein Operator in $H_o(\Omega)^r$ und genüge (3.14).
Weiter sei (alternativ):

a) $f \in C_o(\mathbb{R}^r)^r$,f beschränkt auf ganz $\mathbb{R}^r$ und p,n beliebig,

b) $f \in C_o(\mathbb{R}^r)^r$, $m < 2p - \frac{n}{2}$, $m \in \mathbb{N}_o$.

Dann erfüllt

a) $F(\underline{u}) = f(D_\gamma\, \underline{u})$,$\|\gamma\| \leq 2p-1$, die Voraussetzung (1.20) mit $1 - \frac{1}{2p} < \beta < 1$ und $E = H_o(\Omega)^r$,

b) $F(\underline{u}) = f(D_\gamma\, \underline{u})$, $\|\gamma\| \leq m$, die Voraussetzung (1.20) mit $\beta = \frac{s}{2p}$, $m + \frac{n}{2} < s < 2p$ und ist als Abbildung von $D(A^\beta)$ in $E = H_o(\Omega)^r$ stetig.

Beweis: a) $\underline{u}_n \rightharpoonup \underline{u}$ in $D(A^\beta)$ impliziert wegen Satz 2.8 und der kompakten Einbettung von $H_{2p\beta}(\Omega)^r$ in $H_{2p-1}(\Omega)^r$ $D_\gamma\, \underline{u}_n \longrightarrow D_\gamma\, \underline{u}$ in $H_o(\Omega)^r$. Wegen a) ist $\{f(D_\gamma\, \underline{u}_n)\} \subset H_o(\Omega)^r$ und eine in $H_o(\Omega)^r$ beschränkte Folge. Es existiert deswegen eine Teilfolge, derart daß

$$D_\gamma\, \underline{u}_{n_k}(x) \longrightarrow D_\gamma\, \underline{u}(x) \qquad \text{fast überall in } \Omega \text{ (s. [23] p. 192 f.)}$$

$$f(D_\gamma\, \underline{u}_{n_k}) \rightharpoonup \underline{w} \qquad \text{in } H_o(\Omega)^r .$$

Wegen der Stetigkeit von f folgt:

$$f(D_\gamma\, \underline{u}_{n_k}(x)) \longrightarrow f(D_\gamma\, \underline{u}(x)) \quad \text{fast überall in } \Omega ,$$

was $\underline{w} = f(D_\gamma\, \underline{u})$ impliziert. Wiederholte Anwendung dieses Schlusses liefert: $f(D_\gamma \underline{u}_n) \rightharpoonup f(D_\gamma\, \underline{u})$ in $H_o(\Omega)^r$.

b) Klar, da $\underline{u} \longmapsto D_\gamma \underline{u}$ als Abbildung von $H_s(\Omega)^r$ nach $\dot{H}_t(\Omega)^r$, $\frac{n}{2} < t < s-m$, kompakt und $\underline{w} \longmapsto f(\underline{w})$ als Abbildung von $H_t(\Omega)^r$ nach $H_o(\Omega)^r$ stetig ist (beachte: $t > \frac{n}{2}$).

Bemerkung: Die Beschränktheit von f in a) ist notwendig, wie folgendes Beispiel zeigt: $f(t) = t^2$, $u(x) = x^{-\frac{1}{4}}$, $u \in H_o((0,1))$, aber $f(u) \notin H_o((0,1))$.

Die Nichtlinearitäten in den Sätzen 3.12 bis 3.18 sind sehr allgemein gefaßt. Speziell für multilineare Funktionen f (wie sie bei den Anwendungen häufig vorkommen) erhält man ein feineres Ergebnis, was die Ordnungen der Differentiationen in der Nichtlinearität betrifft.

<u>Lemma 3.19</u> A sei ein Operator in $H_o(\Omega)^r$ und genüge (3.14), $T: \mathbb{R}^r x \ldots x\, \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^r$ sei k-linear und $o < k(2p - \frac{n}{2}) + \frac{n}{2}$. Falls $\sum_{\nu=1}^{k} \|\gamma\| < k(2p - \frac{n}{2}) + \frac{n}{2}$, $o \leq \|\gamma_\nu\| < 2p$, ist, existieren Exponenten α_ν, $o < \alpha_\nu < 1$, $\nu = 1,\ldots,k$, derart daß

$$(3.28) \qquad \|T(D_{\gamma_1}\underline{u}^1, \ldots, D_{\gamma_k}\underline{u}^k)\|_o \leq c\, \|A^{\alpha_1}\underline{u}^1\|_o \ldots \|A^{\alpha_k}\underline{u}^k\|_o$$

für $\underline{u}^\nu \in D(A^{\alpha_\nu})$ gilt.

<u>Beweis:</u> Zunächst gelten aufgrund der allgemeinen Darstellung von T und der Hölderschen Ungleichung die Abschätzungen

$$\|T(\underline{w}^1,\ldots,\underline{w}^k)\|_o^2 = \sum_{i=1}^{r} \|T_i(\underline{w}^1,\ldots,\underline{w}^k)\|_o^2$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \Big\| \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{r} a^i_{i_1,\ldots,i_k}\, w^1_{i_1} \ldots\ldots w^k_{i_k} \Big\|_o^2$$

$$\leq c_1 \sum_{i=1}^{r} \sum_{i_1,\dots i_k=1}^{r} \|w^1_{i_1}\|^2_{L_{t_1}(\Omega)} \cdots\cdots \|w^k_{i_k}\|_{L_{t_k}(\Omega)}, \quad \sum_{\nu=1}^{k} \frac{2}{t_\nu} = 1$$

$$\leq c_1 \|\underline{w}^1\|^2_{L_{t_1}(\Omega)^r} \cdots \|\underline{w}^k\|^2_{L_{t_k}(\Omega)^r} .$$

Sei $N_1 \subset \{1,\dots,k\}$ derart, daß $2p - \|\gamma_\nu\| > \frac{n}{2}$ für $\nu \in N_1$ ist,

$N_2 \subset \{1,\dots,k\}$ derart, daß $2p - \|\gamma_\nu\| \leq \frac{n}{2}$ für $\nu \in N_2$ ist.

Nach Satz 3.9 folgt jeweils:

$$\nu \in N_1: \quad \|D_{\gamma_\nu} \underline{w}^\nu\|_{L_{t_\nu}(\Omega)^r} \leq c_\nu \|A^{\alpha_\nu} \underline{w}^\nu\|_o \qquad \text{mit } \frac{1}{t_\nu} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}(2p\alpha_\nu - \|\gamma_\nu\|)$$

$$\nu \in N_2: \quad \|D_{\gamma_\nu} \underline{w}^\nu\|_{L_{t_\nu}(\Omega)^r} \leq c_\nu \|A^{\alpha_\nu} \underline{w}^\nu\|_o \quad \text{mit}$$

$$\frac{1}{t_\nu} \geq (1-\theta_\nu)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}(2p - \|\gamma_\nu\|)\right) + \frac{\theta_\nu}{2}, \quad \alpha_\nu \geq 1-\theta_\nu\left(1 - \frac{\|\gamma_\nu\|}{2p}\right)$$

$$o < \theta_\nu < 1.$$

Damit erhält man als notwendige Bedingung:

$$1 = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{2}{t_\nu} \geq \sum_{\nu \in N_1} \left(1 - \frac{2}{n}(2p\alpha_\nu - \|\gamma_\nu\|)\right)$$

$$+ \sum_{\nu \in N_2} (1-\theta_\nu)\left(1 - \frac{2}{n}(2p - \|\gamma_\nu\|)\right) + \theta_\nu$$

$$= k - \frac{2}{n}\left\{\sum_{\nu \in N_1} (2p\alpha_\nu - \|\gamma_\nu\|) + \sum_{\nu \in N_2} (1-\theta_\nu)(2p - \|\gamma_\nu\|)\right\}$$

oder:

$$(3.29) \quad (k-1)\frac{n}{2} \leq 2p\left\{\sum_{\nu \in N_1} \alpha_\nu + \sum_{\nu \in N_2} (1-\theta_\nu)\right\} - \left\{\sum_{\nu \in N_1} \|\gamma_\nu\| + \sum_{\nu \in N_2} (1-\theta_\nu)\|\gamma_\nu\|\right\} .$$

Da $(k-1)\frac{n}{2} < 2pk - \sum_{\nu=1}^{k} \|\gamma_\nu\|$ vorausgesetzt ist, existieren $\alpha_\nu, \theta_\nu \in (o,1)$, so daß (3.29) erfüllt ist.

Bemerkung: Man kann die Exponenten $\alpha_\nu, \nu \in N_1$ und die $\theta_\nu, \nu \in N_2$, explizit durch die Gleichung (3.29) bestimmen.

Beispiel: $n=3,\ p=1,\ k=2,\ \|\gamma_1\| = o,\ \|\gamma_2\| = 1$

$$\frac{3}{2} = 2\alpha_1 + 2(1-\theta_2) - (1-\theta_2) = 2\alpha_1 + 1-\theta_2 .$$

Für $\theta_2 = \frac{1}{2}$ erhält man $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{3}{4}$

Für $\theta_2 = \frac{3}{4}$ erhält man $\alpha_1 = \frac{5}{8}$, $\alpha_2 = \frac{5}{8}$.

Ein wichtiger Spezialfall eines solchen bilinearen Operators ist der nichtlineare Term des Navier-Stokeschen Gleichungssystems; die Abschätzung $\|(\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u}\|_o \leq c\,\|A^{\frac{1}{2}}\underline{u}\|_o\,\|A^{\frac{3}{4}}\underline{u}\|_o$ findet man bereits in der Arbeit von Kato und Fujita [26].

Satz 3.20 A sei ein Operator in $H_o(\Omega)^r$ und genüge (3.14),
$T: \mathbb{R}^r \times \ldots \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^r$ sei k-linear und $o < k(2p - \frac{n}{2}) + \frac{n}{2}$. γ_ν, α_ν seien wie in Lemma 3.19.
Dann genügt $R(\underline{v},\underline{u}) = T(D_{\gamma_1}(A^{-\alpha}\underline{v}),\ldots,D_{\gamma_i}(A^{-\alpha}\underline{u}),\ldots,D_{\gamma_k}(A^{\alpha}\underline{v}))$ mit $\alpha_j = \max(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$, $\alpha = \alpha_j$, falls $\alpha_\nu < \alpha_j$ für $\nu \neq j$, $\alpha > \alpha_j$ sonst, den Voraussetzungen (1.9), (1.17) und (1.25).

Beweis: Klar wegen Lemma 3.19.

§ 4 Existenzsätze für fastlineare parabolische Anfangs- und Randwertprobleme.

In diesem Paragraphen wird die Existenz von Lösungen des Anfangs- und Randwertproblems (3.1) nachgewiesen.

Lemma 3.21 A sei ein selbstadjungierter, positiv definiter Operator im Hilbertraum E.
Dann erzeugt $-A_1 := -A|D(A)$ mit $D(A_1) = D(A^2)$ im Hilbertraum D(A) eine holomorphe Halbgruppe $e^{-A_1 t}$ mit der Abschätzung

$$\|e^{-A_1 t}u\|_{D(A)} \le e^{-\delta t} \|u\|_{D(A)} .$$

Dabei ist $e^{-A_1 t} = e^{-At}|D(A)$. Weiter gilt für $A_1^\alpha := A^\alpha|D(A)$:

$$\|A_1^\alpha \; e^{-A_1 t}\underline{u}\|_{D(A)} \le e^{-\delta t} \, t^{-\alpha} \, \|u\|_{D(A)} \, , \quad t > o$$

Beweis: Klar.

Im folgenden ist A ein stark elliptischer, symmetrischer Differentialoperator von der Ordnung 2p (s. (3.3)). Als Operator in $H_o(\Omega)^r$ soll er der Bedingung (3.14) genügen. Dabei ist der Definitionsbereich von A im Sinne von (3.12) durch die Randbedingungen von (3.1) bestimmt (s. Satz 3.3).

M ist linearer Differentialoperator der Form

$$(3.30) \quad M\,\underline{u} = \sum_{|\alpha|\le \ell} b^\alpha D_\alpha \underline{u} \; , \; b^\alpha = (b^\alpha_{ik}(x))_{i,k=1,\dots,r} \; , \; \ell \le 2p-1,$$

$$b^\alpha_{ik} \in C_{2p}(\bar\Omega)$$

Dann gilt wegen der Sätze 3.7, 3.8:

$$(3.31)\quad \|M\,\underline{u}\,\|_o \le \gamma_8\,\|A^{\bar\beta}\,\underline{u}\,\|_o \quad ,\ \frac{\ell}{2p} \le \bar\beta < 1,\quad \underline{u} \in D(A^{\bar\beta})\ .$$

$$(3.32)\quad \begin{cases} M\,\underline{u} \in D(A^{\varepsilon}) \quad \text{für } \underline{u} \in D(A^{\beta}), \quad \bar\beta < \beta < 1, \\ A^{\varepsilon} \circ M : D(A^{\beta}) \longrightarrow E \text{ ist stetig. } (\varepsilon < \beta - \frac{\ell}{2p}) \end{cases}$$

$$(3.33)\quad \|A^{-1+\frac{s}{2p}}\ \ M\,\underline{u}\|_{D(A)} \le c\,\|\underline{u}\,\|_{D(A)} \quad ,\ o < s < \min(\tfrac{1}{2},\ 2p - \ell),\ \underline{u} \in D(A)$$

(s. dazu (2.10), (2.11) und die dort anschließenden Bemerkungen.)

<u>Definition 3.22</u> Eine Abbildung $\underline{u}:\Omega \times [0,T) \dashrightarrow \mathbb{R}^r$ heißt <u>Lösung</u> von (3.1), falls $\underline{u} : [0,T) \to H_o(\Omega)^r$ eine strikte Lösung in $(0,T)$ der Evolutionsgleichung

$$\frac{d}{dt}\,\underline{u} = -A\,\underline{u} - M\,\underline{u} + F(\underline{u}) \quad , \underline{u}(o) = \underline{u}_o$$

in $H_o(\Omega)^r$ ist.

<u>Satz 3.23</u> Sei $m < 2p - \frac{n}{2}$, $m \in \mathbb{N}_o$, $f \in C_{[\frac{n}{2}+1]}(\mathbb{R}^r)^r$.

Dann besitzt

$$\frac{d}{dt}\ \underline{u}(t) = -A\,\underline{u}(t) - M\,\underline{u}(t) + f(D_\gamma\,\underline{u}(t))\ ,\ \underline{u}(o) = \underline{u}_o \in D(A^{1+\eta})$$

mit $\|\gamma\| \le m$ eine strikte Lösung in $(0,T)$ in $H_o(\Omega)^r$.

Dabei gilt

$$\lim_{t\uparrow T} \|A^{1+\eta}\ \underline{u}(t)\,\|_o = \infty \quad , \text{ falls } T < \infty \text{ ist.}$$

Ist $f(o) = Df(o) = o$ und $M = o$, dann existiert die Lösung global, falls $\|A^{1+\eta}\ \underline{u}_o\|_o$ hinreichend klein ist; darüber hinaus gilt in diesem Fall:

$$\|A^{1+\eta}\, u(t)\|_o \leq \varepsilon e^{-bt} \quad ,t \in [o,\infty), \text{ falls } \|A^{1+\eta}\, \underline{u}_o\|_o \leq \delta(\varepsilon).$$

<u>Beweis:</u> Wegen Satz 3.12, (3.33) und Lemma 3.21 besitzt aufgrund der Sätze 1.6, 1.12 die Evolutionsgleichung in $E = D(A)$

$$(3.34) \quad \frac{d}{dt} A^{-1+\frac{s}{2p}-\eta}\, \underline{v}(t) = -A^{\frac{s}{2p}-\eta}\underline{v}(t) - A^{-1+\frac{s}{2p}}\, M\, A^{-\eta}\, \underline{v}(t)$$
$$+ A^{-1+\frac{s}{2p}}\, f(D_\gamma(A^{-\eta}\underline{v}(t))),\ v(o) = A^{\eta}\, \underline{u}_o$$

eine strikte Lösung in (O,T). Da $\frac{d}{dt}$ die starke Differentation in $D(A)$ bedeutet, existiert die Differentiation $\frac{d}{dt}$ in $H_o(\Omega)^r$ und es gilt:

$$\frac{d}{dt} A^{-1+\frac{s}{2p}-\eta}\, \underline{v} \quad = \quad A^{-1+\frac{s}{2p}-\eta}\, \frac{d}{dt}\, \underline{v}$$

(Diff. in $D(A)$) (Diff. in $H_o(\Omega)^r$)

Mit $\underline{u} = A^{-\eta}\underline{v}$ und nach Anwendung von $A^{1-\frac{s}{2p}}$ auf (3.34) folgt der erste Teil der Behauptung.

Die letzten Behauptungen folgen aus Satz 2.6 und der Abschätzung (3.21).

Bemerkung: $\underline{u} \in C([O,T), D(A^{1+\eta}))$. Da $2p - m > \frac{n}{2}$ vorausgesetzt ist, folgt:

$$\underline{u} \in C([O,T),\ C_{\frac{\cancel{2p-m}}{m}}(\bar{\Omega})).$$

<u>Satz 3.24</u> Es sei $D(A) = H_{2p}(\Omega)^r \cap \mathring{H}_p(\Omega)^r$ (Dirichlet-Randbedingungen), $p > \frac{n}{4}$ und $f \in C_\infty(\mathbb{R}^r)^r$ und analytisch (s. Satz 3.13). Dann besitzt

$$(3.35) \quad \frac{d}{dt}\underline{u}(t) = -A\, \underline{u}(t) + f(A^\gamma\, \underline{u}(t)),\quad \underline{u}(o) = \underline{u}_o \quad D(A^{1+\alpha}),\ \gamma < \alpha < 1,$$

eine strikte Lösung in (O,T) in $D(A)$.

Bemerkung: Da $2p > \frac{n}{2}$ vorausgesetzt ist, gilt:

Die Differentiation $\frac{d}{dt}$ in $D(A)$ ist gleich der partiellen Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}$;
$\underline{u}(t,\cdot) \in D(A^2)$ impliziert: $\underline{u}(t,\cdot) \in C_{2p}(\bar{\Omega})^r$, $t \in (0,T)$,
$\underline{u} \in C_1((0,T),D(A))$, $A\,\underline{u} \in C((0,T),D(A))$ bedeutet:
$\frac{\partial}{\partial t}\,\underline{u} \in C((0,T),C_o(\bar{\Omega}))$, $A\,\underline{u} \in C((0,T),C_o(\bar{\Omega}))$, und schließlich folgt aus
$\underline{u}(t,\cdot) \in \mathring{H}_p(\Omega)^r \cap C_{2p}(\bar{\Omega})^r$, daß die Dirichletrandbedingungen $D_\alpha\,\underline{u}(t,x) = o$,
$x \in \partial\Omega$, $|\alpha| \leq p-1$, klassisch erfüllt sind.

Beweis von Satz 3.24: Klar nach den Sätzen 3.13, 1.6, 1.11.

Beispiel: $(r=1)$ Das Anfangs- und Randwertproblem

$$\frac{\partial}{\partial t}\,u(t,x) = -A\,u(t,x) + e^{A^\gamma\,u(t,x)} \qquad \text{in } \Omega \times [0,T)$$

$$D_\alpha(u(t,x) = o\ , \quad |\alpha| \leq p-1 \text{ auf } \partial\Omega \times [0,T)$$

$$u(o,x) = u_o(x) \qquad \text{in } \Omega$$

besitzt im Falle $p > \frac{n}{4}$ und für hinreichend reguläre Anfangsbedingungen $u_o (u_o \in D(A^2))$ lokal eine klassische Lösung.

Korollar 3.25 Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie zu Satz 3.34. Ist $f(o) = Df(o) = o$, dann ist die Lösung $\underline{u} = o$ von (3.35) asymptotisch stabil:

(3.36) $\|A^{1+\alpha}\,\underline{u}(t)\|_o \leq \varepsilon e^{-bt}$, $t \in [o,\infty)$, falls $\|A^{1+\alpha}\,\underline{u}_o\|_o \leq \delta(\varepsilon)$.

Beweis: Klar nach den Sätzen 3.13 und 2.6.

<u>Bemerkung</u>: Wegen $p > \frac{n}{4}$ impliziert (3.36) die <u>gleichmäßige</u> Konvergenz von $\underline{u}(x,t)$ auf Ω gegen o:

$$\sup_{\substack{|\gamma| \le [2p(1+\alpha) - \frac{n}{2} + 1] \\ x \in \bar{\Omega}}} |D_\gamma u(t,x)| \le \varepsilon' e^{-bt}$$

(Da hier $D(A^2) \subset H_{4p}(\Omega)$ gilt, folgt analog zum Satz 3.8:
$D(A^{1+\alpha}) \subset H_{2p(1+\alpha)}(\Omega)$.)

<u>Beispiel:</u> u_o sei eine klassische Lösung des Randwertproblems:

$$\text{(3.37)} \qquad \begin{aligned} \Delta u_o + e^{u_o} &= o \qquad \text{in } \Omega \\ u_o|_{\partial\Omega} &= o \end{aligned}$$

Dabei ist Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^3$. In Anlehnung an Fujita (s. [17], [18]) wird hier die Frage gestellt, wann diese (evtl. nicht eindeutige) Lösung von (3.37) "stabil", d.h. wann die Lösung v von

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \Delta v + e^v \qquad \text{in } \Omega \times [o,\infty) \\ v_{|\partial\Omega} &= o \\ v_{|t=o} &= v_o \end{aligned}$$

für $t \to \infty$ gegen die stationäre Lösung u_o konvergiert. Der Ansatz $v(t) = u_o + u(t)$ liefert:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + e^{u_o}(e^u - 1) \quad , \; u(o) = v_o - u_o \, .$$

In D(A) (mit $A = -\Delta$) ist folgende Evolutionsgleichung auf Stabilität der Lösung $u = o$ zu untersuchen:

$$\frac{du}{dt} = -A\, u + e^{u_o} u + e^{u_o}(e^u - u - 1) \, .$$

$\lambda_1 > o$ sei der kleinste Eigenwert von A. Dann ist der kleinste Eigenwert von $A + M$ mit $M u = -e^{u_o} u$ <u>positiv</u>, falls

$$(3.38) \qquad \|e^{u_o} \phi\|_o < \lambda_1 \|\phi\|_o \qquad \text{für alle } \phi \in C_o^\infty(\Omega)$$

gilt. Mittels Satz 2.6 und dem Korollar 3.25 folgt damit:

(3.38) ist eine hinreichende Bedingung für die Stabilität der Lösung u_o von (3.37).

Besitzt der Operator $A + M = - \Delta - e^{u_o}$ einen negativen Eigenwert (und ist o kein Eigenwert), dann ist u_o instabil (in der Topologie von $D(A)$). (Verwende Satz 2.7)

Die Methoden und Formulierung der Ergebnisse in [17],[18] sind ganz verschieden von den hier verwandten; dies soll nur als ergänzendes Beispiel verstanden werden.

Im folgenden sind wieder beliebige Randbedingungen zugelassen.

<u>Satz 3.26</u> Es gelte alternativ:

a) $m < 2p - \frac{n}{2}$, $m \in \mathbb{N}_o$, $f \in C_1(\mathbb{R}^r)^r$

b) $m < 2p - \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{n}{2}$, $m \in \mathbb{N}_o$, $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^r)^r$, $\frac{n}{n+2} < \alpha < 1$ (s. Satz 3.16)

Dann besitzt

$$\frac{d}{dt} \underline{u}(t) = -A\underline{u}(t) - M\underline{u}(t) + f(D_\gamma \underline{u}(t)), \quad \underline{u}(o) = \underline{u}_o \in D(A^\beta)$$

mit $\|\gamma\| \leq m$ eine strikte Lösung in $(0,T)$ in $H_o(\Omega)^r$.

Dabei gilt: $\lim\limits_{t \uparrow T} \|A^\beta \underline{u}(t)\|_o = \infty$, falls $T < \infty$ ist.

$\beta > \max(\bar{\beta}, \frac{s}{2p})$, wobei β durch (3.31) und s durch die Sätze 3.14, 3.16 bestimmt ist.

<u>Beweis:</u> Klar wegen der Sätze 3.14, 3.16, 1.6 und 1.12.

<u>Beispiel</u>: $n = 3$, $p = 1$, $\frac{3}{5} < \alpha < 1$, $\alpha \in \mathbb{Q}$ derart, daß t^α für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist. Dann besitzt

$$\frac{d}{dt} u = + \Delta u - M u + (D_\gamma u)^\alpha , \quad u(o) = u_o \in D(A^{\frac{s}{2}})$$

mit $|\gamma| \le 1$ eine strikte Lösung in $(0,T)$ in $H_o(\Omega)$. $(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{3}{2} < s < 2)$ Dabei ist M ein linearer Differentialoperator erster Ordnung. Die Randbedingungen sind im Definitionsbereich von Δ enthalten.

Wird für f nur noch die Stetigkeit vorausgesetzt, erhält man:

<u>Satz 3.27</u> Es gelte alternativ:

a) $f \in C_o(\mathbb{R}^r)^r$, f beschränkt auf ganz $\mathbb{R}^r$,

b) $f \in C_o(\mathbb{R}^r)^r$, $m < 2p - \frac{n}{2}$, $m \in \mathbb{N}_o$.

Dann existiert ein $\underline{u} \in C([0,T), D(A^\beta))$, das strikte Lösung von

$$(3.39) \quad \frac{d}{dt} A^{-\varepsilon} \underline{u}(t) = -A^{1-\varepsilon} \underline{u}(t) + A^{-\varepsilon} M \underline{u}(t) + A^{-\varepsilon} f(D_\gamma \underline{u}(t))$$
$$\underline{u}(o) = \underline{u}_o \in D(A^\beta)$$

für <u>jedes</u> $\varepsilon \in (o, 1-\beta)$ in $(0,T)$ ist. (Zu β s. Satz 3.18 und (3.32).)

Für γ gilt im Falle a): $\|\gamma\| \le 2p-1$,

im Falle b): $\|\gamma\| \le m$.

<u>Beweis:</u> Klar wegen der Sätze 3.18 und 1.15.

Der Nachweis einer Lösung von (3.39) mit $\varepsilon = o$ ist mir für eine allgemeine stetige Funktion f nicht gelungen. Im Hinblick auf die Zusatzvoraussetzung (1.22) im § 5 von Kapitel 1 wird gefordert:

$$(3.40)\quad \begin{cases} f(\underline{u}) \in H_t(\Omega)^r \quad \text{für } \underline{u} \in H_{2p-\|\gamma\|}(\Omega)^r\ ,\ t > o\ (\text{fest}), \\ \underline{u} \mapsto f(\underline{u}) \ \text{ ist für } \ \underline{u} \in H_{2p-\|\gamma\|}(\Omega)^r \text{ als Abbildung von} \\ H_{2p\beta-\|\gamma\|}(\Omega)^r \text{ nach } H_t(\Omega)^r \text{ stetig } (o < \beta < 1). \end{cases}$$

Aufgrund der Sätze 3.7, 3.8 folgt für $F(\underline{u}) = f(D_\gamma\, \underline{u})$ aus (3.40) die Bedingung (1.22), falls f a) oder b) genügt (β jeweils wie in Satz 3.18).

Wegen Satz 1.16 erhält man dann:

Satz 3.28 Sei f wie in Satz 3.27 und f genüge (3.40).
Genügt f der Voraussetzung a), dann gibt es ein $\underline{u} \in C([0,T);D(A^\beta))$, das Lösung von

$$D_t\, \underline{u}(t) = -A\, \underline{u}(t) - M\, \underline{u}(t) + f(D_\gamma\, \underline{u}(t)),\ \underline{u}(o) = \underline{u}_o \in D(A^\beta)$$

mit $\|\gamma\| \leq 2p-1$ in $H_o(\Omega)^r$ im Sinne von Satz 1.16 ist.

Genügt f der Voraussetzung b), dann gibt es ein $\underline{u} \in C([0,T),D(A^\beta))$, das strikte Lösung in (0,T) von

$$\frac{d}{dt}\, \underline{u}(t) = -A\, \underline{u}(t) - M\, \underline{u}(t) + f(D_\gamma\, \underline{u}(t)),\ \underline{u}(o) = \underline{u}_o \in D(A^\beta)$$

mit $\|\gamma\| \leq m$ in $H_o(\Omega)^r$ ist.

Zum Schluß sollen parabolische Anfangs- und Randwertprobleme mit Nichtlinearitäten von "Polynomcharakter" auf Existenz, Stabilität und Instabilität hin untersucht werden. Insbesondere sind die Navier-Stokesschen Gleichungen von diesem Typus (s. dazu die Ergebnisse in [27]).

Definition 3.29 Ein Operator $F: H_o(\Omega)^r \longrightarrow H_o(\Omega)^r$ heißt ein "Polynom", falls

$$(3.41)\qquad F = \sum_{k=o}^{N} T_k$$

ist und T_k k-linear ist. Dabei ist der Definitionsbereich von F:

$$D(F) = \bigcap_{k=1}^{N} D(T_k) .$$

Im folgenden sei T_k stets durch eine k-lineare Abbildung $T_k\colon \mathbb{R}^r \times \ldots \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^r$ induziert und von der Form

$$(3.42) \quad T_k(\underline{u}) = T_k(D_{\gamma_1}\underline{u}, \ldots, D_{\gamma_k}\underline{u}), \quad o \le \|\gamma_\nu\| < 2p, \quad \sum_{\nu=1}^{k} \|\gamma_\nu\| < k(2p - \tfrac{n}{2}) + \tfrac{n}{2} .$$

Nach Satz 3.19 existiert dann ein $\alpha = \alpha(k) < 1$, derart daß $D(T_k) \supset D(A^\alpha)$ ist.
Für D(F) erhält man dann: $D(F) = D(A^{\bar\beta})$, $\bar\beta = \max\limits_{k=1,\ldots,N} \alpha(k) < 1$.

<u>Satz 3.30</u> F sei ein "Polynom" (3.41), wobei die T_k von der Form (3.42) sind. Dann besitzt

$$(3.43) \quad \frac{d}{dt}\underline{u}(t) = -A\,\underline{u}(t) - M\,\underline{u}(t) + F(\underline{u}(t)) , \quad \underline{u}(o) = \underline{u}_o \in D(A^\beta)$$

eine strikte Lösung in (0,T) in $H_o(\Omega)^r$ $\quad (\bar\beta < \beta < 1)$.

$\underline{u} \in C([0,T), D(A^\beta))$ und $\lim\limits_{t\uparrow T} \|A^\beta \underline{u}(t)\|_o = \infty$, falls $T < \infty$.

Ist $T_o = T_1 = o$, die Ordnung von M kleiner oder gleich p und $\mathrm{re}\,\sigma(A+M) \ge a > o$, so ist die Lösung $\underline{u} = o$ von (3.43) <u>asymptotisch stabil</u>:

$$\|A^\beta \underline{u}(t)\|_o \le \varepsilon e^{-bt}, \quad t \in [o,\infty), \text{ falls } \|A^\beta \underline{u}_o\|_o \le \delta(\varepsilon),\ \bar\beta < \beta < 1.$$

Bemerkung: Man kann wegen Satz 3.20 auch $\beta = \bar\beta$ setzen, falls $\beta = \alpha(j)$ jeweils strikte Maxima sind.

Existiert umgekehrt kein Spektralpunkt von A+M mit verschwindendem, aber einer mit negativem Realteil, so gibt es ein $\varepsilon_o > o$ derart, daß in <u>jeder</u> Umgebung von $\underline{u} = o$ in $H_o(\Omega)^r$ ein $\underline{u}_o \in D(A^\beta)$ und eine strikte Lösung $\underline{u}$ von

(3.43) mit der Anfangsbedingung $\underline{u}_o$ existiert, so daß $\|\underline{u}(t_o)\|_o > \varepsilon_o$ für mindestens ein $t_o \in (0,T)$ ist.

<u>Beweis:</u> Klar wegen der Sätze 3.20, 1.5, 1.7, 1.11, 2.6, 2.7.

Diese letzten Stabilitäts- und Instabilitätsaussagen sind insofern von Wichtigkeit, als sie bei physikalischen Problemen - durch eine Gleichung der Form (3.43) beschrieben - unter einer Vielzahl von stationären Lösungen die "stabilen" als die in der Natur auftretenden zu beschreiben helfen. Diesbezügliche Phänomene in der "Fluid-Dynamik" werden in [27] eingehend behandelt.

Die Frage, wann aus der Existenz von $\frac{d}{dt}$ in $H_o(\Omega)$ die Existenz der partiellen Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}$ folgt, würde sich in natürlicher Weise anschließen, da man ja von dem Anfangs- und Randwertproblem (3.1) ausgegangen ist. Ich möchte dazu hier nur auf die Ergebnisse von Fujita und Kato in [21] verweisen, die diese Untersuchung speziell für die Navier-Stokesschen Gleichungen gemacht haben.

§ 5 Kommentare

Existenzsätze bei quasi- bzw. fastlinearen parabolischen Anfangs- und Randwertproblemen findet man in unzähligen Arbeiten. Zuerst ist auf die Monographien [28] und [15] zu verweisen, in denen die wichtigsten Methoden dargestellt sind: im linearen Fall u.a. die der Potentialtheorie, der Approximation (Galerkinverfahren), die Schaudersche Kontinuitätsmethode in der C_α-Theorie, die Darstellungs- bzw. Variationsmethode in der Hilbertraum-Theorie;
im nichtlinearen Fall im wesentlichen die C_α-Theorie, die sehr weitreichende Ergebnisse liefert.
Ein Übersichtsartikel über die letztere ist der von Edmunds [13] .
Von Wahl [49] beschäftigt sich vor allem mit a-priori-Abschätzungen der C_α-Theorie, die bei gewissen Wachstumsbedingungen der Nichtlinearität die globale Existenz garantieren. Während in den oben genannten Büchern im wesentlichen parabolische Gleichungen zweiter Ordnung behandelt werden, sind es in [49] Systeme höherer Ordnung, die untersucht werden.
Nichtlineare Anfangs- und Randwertprobleme sind mittels der "L_p-Theorie" (oder Hilbertraum-Theorie) in folgenden Arbeiten behandelt worden: [4], [8], [24], [30], [36], [43], [45], [47], [48].
Unter der Vielzahl der Methoden seien die der Approximation, Monotonie, Koerzivität, Regularisation und der Halbgruppentheorie erwähnt. Der Lösungsbegriff wird dabei bis zur Distribution abgeschwächt.

Bei elliptischen Differentialoperatoren kann man die von ihnen erzeugte Halbgruppe durch eine Greensche Funktion darstellen, was von Fujita und Watanabe ([17], [18], [20]) ausgenutzt wird. Sie verwenden ein Iterationsverfahren, das punktweise monoton gegen die Lösung konvergiert. Das geht nur bei konvexen

Nichtlinearitäten, wie es z.B. die e-Funktion ist. Der Lösungsbegriff ist der der schwachen Lösung.

Halbgruppentheorie im Zusammenhang mit der L_p-Theorie wird von Kato und Fujita ([21], [26]) angewandt und von Masuda [36] bei Analytizitätsuntersuchungen benutzt. In [26] taucht der Begriff der "strikten" Lösung auf.

Was die Stabilität bei Anfangs- und Randwertproblemen betrifft, so sind die "klassischen" Arbeiten [3], [16] und [37] zu erwähnen. Es handelt sich dort um Abschätzungen der C_α-Theorie.

In den Artikeln von Prodi und Jooss ([43], [24]) findet man Stabilitätsaussagen für die Navier-Stokesschen Gleichungen in $D(A^{\frac{1}{2}})$ bzw. $D(A)$. Die in der vorliegenden Arbeit dargestellte Methode schließt fast die Lücke: sie liefert in diesem Spezialfall Stabilität in $D(A^\beta)$ mit $\frac{5}{8} < \beta < 1$.

Anhang

Lemma 4.1 Sei $u \in H_m(\Omega)$, $m > \frac{n}{2}$, $\sum\limits_{i=1}^{k} |\gamma_i| \leq m$

Dann gilt: $\|(D_{\gamma_1} u) \ldots (D_{\gamma_k} u)\|_o \leq c(k) \|u\|_m^k$

Beweis: Es wird über k induziert. Die Behauptung ist für k = 1 klar.

Schluß von k auf k+1 (unter Verwendung der Sobolevschen Einbettungssätze):

a) $m - |\gamma_1| > \frac{n}{2}$

$$\int_\Omega (D_{\gamma_1} u \ldots D_{\gamma_k} u\, D_{\gamma_{k+1}} u)^2\, dx \leq \sup_{x\in\bar\Omega} |D_{\gamma_1} u(x)|^2 \int_\Omega (D_{\gamma_2} u \ldots D_{\gamma_{k+1}} u)^2\, dx$$

$$\leq c_1\, c(k)\, \|u\|_m^{2(k+1)}$$

nach Induktionsannahme.

b) $m - |\gamma_1| \leq \frac{n}{2}$

$$\int_\Omega (D_{\gamma_1} u \ldots D_{\gamma_k} u\, D_{\gamma_{k+1}} u)^2\, dx \leq \left(\int_\Omega (D_{\gamma_1} u)^{2p} dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega (D_{\gamma_2} u \ldots D_{\gamma_{k+1}} u)^{2q} dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq c_2 \|u\|_m^2 \|D_{\gamma_2} u \ldots D_{\gamma_{k+1}}\|^2_{|\gamma_1|}$$

falls $p \leq \frac{n}{n-2(m-|\gamma_1|)}$ und $q \leq \frac{n}{n-2|\gamma_1|}$ gilt.

Diese Bedingungen sind wegen der Voraussetzung $m > \frac{n}{2}$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ verträglich.

Wegen der Leibniz-Regel folgt weiter:

$$\|D_{\gamma_2} u \ldots D_{\gamma_{k+1}} u\|^2_{|\gamma_1|} \leq \sum_{\text{endl.}} c_3 \|D_{\bar\gamma_2} u \ldots D_{\bar\gamma_{k+1}} u\|_o^2$$

mit $\sum\limits_{\nu=2}^{k+1} |\bar\gamma_\nu| \leq \sum\limits_{\nu=2}^{k+1} |\gamma_\nu| + |\gamma_1| \leq m$, woraus aufgrund der Induktionsannahme

$$\|D_{\gamma_2}u \dots D_{\gamma_{k+1}}u\|_{|\gamma_1|} \le c_4 \|u\|_m^k \quad \text{folgt.}$$

Der Beweis von Lemma 3.1 folgt mit Hilfe von Lemma 4.1.

Lemma 4.2 Sei $u \in H_p(\Omega)$, $v \in H_{2p}(\Omega)$, $p > \frac{n}{4}$, $|\gamma_1| + |\gamma_2| \le p$

Dann gilt: $\|D_{\gamma_1}u\, D_{\gamma_2}v\| \le c\,\|u\|_p\,\|v\|_{2p}$

Beweis: a) $p - |\gamma_1| > \frac{n}{2}$

b) $2p - |\gamma_2| > \frac{n}{2}$

Diese beiden Fälle sind klar.

c) $p - |\gamma_1| \le \frac{n}{2}$, $2p - |\gamma_2| \le \frac{n}{2}$

$$\|D_{\gamma_1}u\, D_{\gamma_2}v\|_o^2 \le \left(\int_\Omega (D_{\gamma_1}u)^{2r_1}\right)^{\frac{1}{r_1}} \left(\int_\Omega (D_{\gamma_2}v)^{2r_2}\right)^{\frac{1}{r_2}}, \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1$$

$$\le c\,\|u\|_p^2\,\|v\|_{2p}^2,$$

falls $r_1 \le \frac{n}{n-2(p-|\gamma_1|)}$, $r_1 \le \frac{n}{n-2(2p-|\gamma_2|)}$ ist.

Das impliziert:

$$\frac{n-2(2p-|\gamma_2|)}{n} \le \frac{1}{r_1} = 1 - \frac{1}{r_2} \le \frac{2(p-|\gamma_1|)}{n}.$$

Dies ist aber wegen $n - 2(2p - |\gamma_2|) < 2(p - |\gamma_1|)$ erfüllbar.

Lemma 4.3 Sei $u, v \in H_p(\Omega)$, $p > \frac{n}{4}$.

Dann gilt $\|u\,v\|_o \le c\,\|u\|_p\,\|v\|_p$

Beweis: Analog zum Beweis von Lemma 4.2.

L I T E R A T U R

[1] S.Agmon : The Coerciveness Problem for Integro - Differential Forms
J.Anal.Math. 6 (1958), 183 - 223

[2] S.Agmon : Remarks on Self - Adjoint and Semi - Bounded Elliptic Boundary Value Problems
Proc. Int. Symp. Linear Spaces, Jerusalem 1960, Pergamon Press and Jerusalem Academic Press (1961), 1 - 13

[3] R.Bellman : On the Existence and Boundedness of Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations of Parabolic Type
Trans.Am.Math.Soc. 64 (1948), 21 - 44

[4] C.Bardos, H.Brézis : Sur une classe de problèmes d'évolution non linéaires
J.Diff.Equat. 6 (1969), 345 - 394

[5] F.E.Browder : On the Regularity Properties of Solutions of Elliptic Differential Equations
Comm.Pure Appl.Math. 9 (1956), 351 - 361

[6] F.E.Browder : Non - Linear Equations of Evolution
Ann.Math. 80 (1964), 485 - 523

[7] F.E.Browder : Non Linear Initial Value Problems
Ann.Math. 82 (1965), 51 - 87

[8] F.E.Browder : Existence Theorems for Nonlinear Partial Differential Equations
"Global Analysis" Proc. Symp. Pure Math. AMS, Vol.16 (1970), 1 - 60

[9] R.W.Carroll : Abstract Methods in Partial Differential Equations
Harper and Row, Publishers (1969)
New York, Evanston, London

[10] G.Da Prato : Somme d'applications non linéaires et solutions globales quasi-linéaires dans des espaces de Banach
Boll.Un.Mat.Ital. (4) 2 (1969), 229 - 240

[11] R.Datko : Extending a Theorem of A.M.Liapunov to Hilbert Space
J.Math.Anal.Appl. 32 (1970), 610 - 616)

[12] N.Dunford, J.T.Schwartz : Linear Operators, Part I
Interscience Publishers, New York (1967)

[13] D.E.Edmunds : Quasilinear Second Order Elliptic and Parabolic Equations
Bull.London Math.Soc. 2 (1970), 5 - 28

[14] A.Friedman : Partial Differential Equations
Holt, Rinehart and Winston (1969), New York

[15] A.Friedman : Partial Differential Equations of Parabolic Type
Prentice - Hall (1964), Englewood Cliffs, N.J.

[16] A.Friedman : Convergence of Solutions of Parabolic Equations to a Steady State
J.Math.Mech. 8 (1959), 57 - 76

[17] H.Fujita : On the Nonlinear Equations $\triangle u + e^{u} = 0$ and $\frac{\partial v}{\partial t} = \triangle v + e^{v}$
Bull.Am.Math.Soc. 75 (1969), 132 - 135

[18] H.Fujita : On the Asymptotic Stability of Solutions of the Equation $v_t = \triangle v + e^{v}$
Proc. Int. Conf. Functional Anal. Rel. Topics, Tokyo 1969. Univ. Tokyo Press (1970)

[19] H. Fujita : On some Nonexistence and Nonuniqueness Theorems for Nonlinear Parabolic Equations
"Nonlinear Functional Analysis" Proc. Symp. Pure Math. AMS, Vol.18,1 (1970), 105 - 113

[20] H. Fujita, S. Watanabe : On the Uniqueness and Non-Uniqueness of Solutions of Initial Value Problems for Some Quasi-Linear Parabolic Equations
Comm.Pure Appl. Math. 21 (1968), 631 - 652

[21] H. Fujita, T.Kato : On the Navier - Stokes Initial Value Problem.I.
Arch.Rat.Mech.Anal. 16 (1964), 269 - 315

[22] E.N.Geršt : A Generalization of Ljapunov's First Theorem on Stability to Certain Classes of Differential Equations in a Banach Space (Russisch)
Differencial'nye Uravnenija 5 (1969), 833 - 847
MR 40 (1970), No 3023

[23] E.Hewitt, K.Stromberg : Real and Abstract Analysis
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York

[24] G.Iooss : Théorie Non Linéaire de la Stabilité des Ecoulements Laminaires dans le Cas de "l'Echange des Stabilités" Arch.Rat.Mech.Anal. 40 (1971), 166 - 208

[25] T. Kato : Perturbation Theory for Linear Operators Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York (1966)

[26] T. Kato, H.Fujita : On the Non - Stationary Navier - Stokes System Rend.Sem.Mat.Univ.Padova 32 (1962), 243 - 260

[27] K.Kirchgässner, H.Kielhöfer : Stability and Bifurcation in Fluid Dynamics Erscheint im Rocky Mount. J. Math.

[28] O.A.Ladyženskaja, V.A.Solonnikov, N.N.Ural'ceva : Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type AMS Translations of Math. Monographs, Vol.23(1968)

[29] J.E.Lagnese : On Equations of Evolution and Parabolic Equations of Higher Order in t J.Math.Anal.Appl. 32 (1970), 15 - 37

[30] J.L.Lions : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires Dunod, Gauthier-Villars, Paris (1969)

[31] J.L.Lions : Sur les espaces d'interpolation; Dualité Math.Scand. 9 (1961), 147 - 177

[32] J.L.Lions, E.Magenes : Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. 1 Dunod, Paris (1968)

[33] J.L.Lions, E.Magenes : Problemi ai limiti non omogenei
Ann.Sc.Norm.Sup.Pisa 15 (1961), 41 - 103

[34] R.H.Martin : A Global Existence Theorem for Autonomous Differential Equations in a Banach Space
Proc.Am.Math.Soc. 26 (1970), 307 - 314

[35] R.H.Martin : A Theorem on Critical Points and Global Asymptotic Stability
J.Math.Anal.Appl. 33 (1971), 124 - 130

[36] K.Masuda : On the Analyticity and the Uniqueness Continuation Theorem for Solutions of the Navier - Stokes Equation
Proc.Japan Acad. 43 (1967), 827 - 832

[37] R.Narasimhan : On the Asymptotic Stability of Solutions of Parabolic Differential Equations
J.Rat.Mech.Anal. 3 (1954), 303 - 313

[38] S.M.Nikol'skii : On Embedding, Continuation and Approximation Theorems
Russ.Math.Surv. 16 (1961)

[39] C.V.Pao : Semigroups and Asymptotic Stability of Nonlinear Differential Equations
SIAM J.Math.Anal. 3 (1972), 371 - 379

[40] A.Pazy : Semigroups of Nonlinear Contractions in Hilbert Space
Lecture Notes Summer School Probl. in Nonlinear Analysis, Varenna, C.I.M.E. (1970), 343 - 430

[41] A.Pazy : On the Applicability of Lyapunov's Theorem in Hilbert Space
SIAM J.Math.Anal. 3 (1972), 291 - 294

[42] R.S.Phillips : Perturbation Theory for Semi - Groups of Linear Operators
Trans.Am.Math.Soc. 74 (1953), 199 - 221

[43] G.Prodi : Teoremi di tipo locale per il sistema di Navier - Stokes e stabilita delle solluzione stazionarie
Rend.Sem.Mat.Padova 32 (1962), 374 - 397

[44] D.H.Sattinger : The Mathematical Problem of Hydrodynamic Stability
J.Math.Mech. 19 (1970), 797 - 817

[45] P.E.Sobolevskii : Equations of Parabolic Type in Banach Space
AMS Transl.Ser.2, 49 (1966), 1 - 62

[46] P.E.Sobolevskii : Fractional Integration by Parts
Sov.Math.Dokl. 9 (1968), 1555 - 1558

[47] B.A.Ton : On Strongly Nonlinear Parabolic Equations
J.Funct.Anal. 7 (1971), 147 - 155

[48] B.A.Ton : Nonlinear Evolution Equations in Banach Spaces
J.Diff.Equat. 9 (1971), 608 - 618

[49] W.H.von Wahl : A-priori Schranken für lineare, semi- und quasilineare parabolische Differentialgleichungen
Habilitationsschrift, Göttingen (1971)

L E B E N S L A U F

Geburtsdatum und -ort :	20. Juni 1945 in Trier
Eltern:	Dr. Erwin Kielhöfer und Frau Ilse, geb. Schondorff
Geschwister:	Dr. Bernd Kielhöfer , geb. 13.5.1938 Jutta Keiser , geb. 27.7.1941
Familienstand:	ledig
Ausbildung:	
Grundschule:	April 1951 - April 1955 Evangelische Volksschule in Trier
Oberschule:	April 1955 - Februar 1964 Staatl. Hindenburg - Gymnasium in Trier (neusprachlich)
Studium:	Mathematik und Physik SS 1964 - SS 1966 an der Freien Universität Berlin WS 1966/67 - SS 1969 an der Albert - Ludwigs - Universität Freiburg Diplom - Prüfung im Oktober 1969